كلية التجارة

الاحتمالات والاستنتاج الرياضى

تأليف

د. طارق محمد على حسن

مراجعة

أ.د. محمود على أبو النصر

الفهرس

مقدمة

يقدم هذا الكتاب شرحا وافيا لبعض أساسيات الاحصاء الأكثر استخداما فى المجالات التجارية وكذلك بعض مجالات التطبيق للأساليب الاحصائية المختلفة.

يبدأ الكتاب بالباب الأول : الاحتمالات.

ثم الباب الثانى : التوزيعات الاحتمالية.

ثم الباب الثالث : الاستدلال الاحصائى.

وأخيرا الباب الرابع : اختبارات الفروض.

وقد راعى المؤلف فى هذا الكتاب عرض الموضوعات بأسلوب ميسر وواضح مع إعطاء الأمثلة المختلفة.

ويأمل المؤلف أن يفى هذا الكتاب بصورته الحالية الهدف الذى كتب من أجله.

المؤلف

البـــاب الأول

الاحتمالات

أولا:مقدمة:

تلعب الاحتمالات دورا هاما فى الحياة اليومية وفى كثير من العلوم لأنها تستخدم فى قياس عدم التأكد ، فكثيرا ما نقابل بعملية اتخاذ قرارات بناء على معلومات ناقصة ونعتمد على الاحتمالات لتساعدنا على الاختيار، فمثلا قد نلغى رحلة خارجية رتبنا لها منذ مدة وذلك لأن احتمال أن يكون الجو رديئا احتمال كبير، وكذلك كثيرا ما يهمل الطالب دراسة جزء صغير من المقرر لأن احتمال ان يأتى فيه سؤال احتمال صغير، وكثيرا ما نتحدث عن احتمال ارتفاع درجة الحرارة فى اليوم التالى،واحتمال فوز فريق كرة قدم على فريق آخر.

وأحيانا نجد أننا نعبر عن الاحتمالات بتقدير عددى، فمثلا قد نستمع الى مسئول الأرصاد الجوية يقول أن احتمال سقوط الأمطار غدا هو 90% ،أو ان تعبر الادارة العليا لإحدى الشركات عن رواج منتجها الجديد بالقول أن احتمال نفاذ الكميات المطروحة فى الأسواق خلال الفترة القادمة 80% .

مما سبق يمكن القول بأن الاحتمال يمثل مقياسا رقميا عن فرصة وامكانية حدوث شيء ما عمليا، وكلما ارتفع هذا المقياس الرقمى الذى يمثل الاحتمال واقترب من 100% (الواحد الصحيح) كلما اقترب هذا الشيء المتوقع حدوثه من حالة التأكد من الحدوث ،والعكس صحيح كلما ابتعد المقياس الرقمى الذى يمثل الاحتمال عن الواحد

الصحيح واقترب من الصفر كلما اقترب هذا الشي المتوقع من عدم الحدوث حتى اذا صار هذا الاحتمال يساوى صفرا فإن هذا الشيء يكون من المؤكد عدم حدوثه، ولهذا يمكن القول بأن الاحتمال رقما حقيقيا بين الصفر والواحد الصحيح.

وبصفة عامة يمكن القول أن نظرية الاحتمالات تقدم قيما رقمية لتوقعاتنا غير المؤكدة، وقد بدات دراسة الاحتمالات فى القرن السابع عشر فى أوربا حيث كانت ألعاب المقامرة مثل ورق اللعب ورمى الزهر منتشرا خاصة فى فرنسا وكانت هذه الفترة هى فترة النهضة العلمية فى أوربا الغربية وخاصة فى مجال الرياضيات، وقد شعر المقامرون بحاجتهم الى أسس منظمة تساعدهم على حساب فرصهم فى المكسب والخسارة فلجأوا الى علماء الرياضة من أمثال باسكال وبرنوللى.

وهنا كانت نقطة البداية فى الدراسات الجديدة فى علم الاحتمالات، ومنذ ذلك الوقت بدأ هذا العلم يتطور ويتعمق فى أساسه الرياضى حتى أصبح فرعا من فروع الرياضة التطبيقيه كما أصبح أساسا لعلوم كثيرة كعلم الاحصاء ورياضيات التأمين وبحوث العمليات والتخطيط.

ثانيا:مفاهيم اساسية:

لكى نتمكن من عرض أسس نظرية الاحتمالات سنقدم بعض التعريفات المستخدمة فى هذا المجال.

التجربة العشوائية : Random Experiment

التجربة هى أى إجراء يمكن وصفه وصفا دقيقا وملاحظة ما ينتج عنه ، والتجارب نوعان:

(أ) تجارب محددة أومؤكدة :

فى هذا النوع من التجارب نجد أنه اذا تكررت التجربة تحت نفس الظروف فمن المؤكد الحصول على نفس النتائج ، مثال ذلك أنه اذا تم إلقاء تفاحة الى أعلى فانها لابد وأن تسقط على الأرض.

(ب) تجارب عشوائية أو محاولات عشوائية :

فى هذا النوع من التجارب نجد أن عوامل الصدفة هى التى تتحكم فى ظهور نتائج التجربة ، بمعنى أنه اذا تكررت التجربة تحت نفس الظروف فربما تختلف النتائج وبالتالى لايمكن التنبؤ بنتائجها ويوضح ذلك الأمثلة التالية:

- اذا القيت قطعة عملة فإننا لانستطيع أن نتنبأ ما اذا كان السطح العلوى لها سيكون صورة أو كتابة.
- اذا القيت زهرة نرد مرة واحدة فإننا لانستطيع أن نتنبأ ما اذا كان السطح العلوى لها يمثل الرقم ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ .
- اذا سحبنا ورقة من أوراق اللعب (الكوتشينة) فاننا لانعلم اذا كانت الورقة المسحوبة صورة أو عدد.

نلاحظ من الأمثلة السابقة أننا نعلم مسبقا النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ولكننا لانعرف اى منها سيقع.

مما سبق يمكن تعريف التجربة العشوائيةأو المحاولة العشوائية بأنها أى اجراء نعلم مسبقا جميع النتائج الممكنة له وإن كنا لانستطيع أن نتنبأ أى من هذه النتائج سيتحقق فعلا.

فضاء العينة : Sample Space

من المعروف أن لكل تجربة عشوائية عددا من النتائج الممكنة ، ومجموعة هذه النتائج يطلق عليها فراغ العينة ويرمز له بالرمز (ف).

الحدث : Event

الحدث هو حالة أو أكثر من الحالات التى تظهر نتيجة لاجراء التجربة ، ففى تجربة القاء قطعة العملة اذا كان الحدث هو الحصول على صورة فإن هذا الحدث يتحقق فى حالة الصورة فقط وهى حالة واحدة ، أما فى تجربة رمى زهرة النرد اذا كان الحدث هو الحصول على رقم فردى فإنه يتحقق عند ظهور حالة من حالات ثلاث هى (5،3،1).

فضاء الأحداث (فراغ الأحداث): Events Space

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ويمثل ماهو مطلوب تحقيقه أو الحصول عليه.

مثال(1):

اذا تم رمى زهرة نرد مرة واحدة اوجد ما يلى:

(1) فضاء العينة لهذه التجربة.

(2) فراغ الأحداث لحدث الحصول على رقم زوجى.

(3) فراغ الأحداث لحدث الحصول على رقم فردى.

الحل

(1) فضاء العينة للتجربة (ف) = {1، 2، 3، 4، 5، 6}

(2) فراغ الأحداث لحدث الحصول على رقم زوجى = { 2، 4، 6 }

(3) فراغ الأحداث لحدث الحصول على رقم فردى = {1، 3، 5 }

مثال(2):

اذا تم القاء قطعة عملة متكاملة التوازن مرتين أو (القاء قطعتين عملة متكاملتى التوازن مرة واحدة) اوجد مايلى:

(1) فضاء العينة لهذه التجربة.

(2) فراغ الأحداث لعدد مرات ظهور الصورة.

الحل

عدد الحالات الكلية = 2 X 2 = 4

ويمكن توضيح عدد الحالات الممكنة عند القاء قطعة عملة متكاملة التوازن مرتين أو (القاء قطعتين عملة متكاملتى التوازن مرة واحدة) من خلال الجدول التالى:

الحالات	الرمية الأولى	الرمية الثانية
1	ص	ص
2	ص	ك
3	ك	ص
4	ك	ك

حيث :

ص ⟸ معناها ظهور الصورة.

ك ⟸ معناها ظهور الكتابة.

(1) فضاء العينة لهذه التجربة = {(ص ، ص)،(ص ، ك)،(ك ، ص)، (ك ، ك) }

(2) فراغ الأحداث لعدد مرات ظهور الصورة = { 0،1،2}

0 ⟸ معناه عدم ظهور الصورة.

1 ⟸ معناه ظهور الصورة مرة واحدة فقط.

2 ⟸ معناها ظهور الصورة مرتين.

مثال (3):

اذا تم القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) اوجد مايلى:

(1) فضاء العينة لهذه التجربة.

(2) حدث الحصول على أشكال متشابهة.

(3) حدث الحصول على صورتين وكتابة.

(4) فراغ الأحداث لعدد مرات ظهور الصورة.

الحل

عدد الحالات الكلية = $2 \times 2 \times 2 = 8$

ويمكن توضيح عدد الحالات الممكنة عند القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) من خلال الجدول التالى:

الحالات	الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة
1	ص	ص	ص
2	ص	ص	ك
3	ص	ك	ص
4	ص	ك	ك
5	ك	ص	ص
6	ك	ص	ك
7	ك	ك	ص
8	ك	ك	ك

(1) ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ،(ص ،ك، ك)
، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}

(2) حدث الحصول على أشكال متشابهة = {(ص ، ص ، ص)، (ك ، ك ، ك)}

(3) حدث الحصول على صورتين وكتابة = { (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ،

(ك ، ص ، ص) }

(4) فراغ الأحداث لعدد مرات ظهور الصورة = {0 ، 1 ، 2 ، 3 }

مثال (4):

اذا تم رمى زهرة نرد متكاملة التوازن مرتين أو (رمى زهرتى نرد متكاملتى التوازن مرة واحدة) اوجد ما يلى :

(1) فضاء العينة لهذه التجربة.
(2) حدث أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين = 10.
(3) حدث أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين يساوى عدد زوجى.

الحل

عدد الحالات الكلية = $6 X 6 = 36$

(1) ويمكن بيان فضاء العينة لهذه التجربة فى الجدول الآتى:

الثانية / الأولى	1	2	3	4	5	6
1	(1 ، 1)	(2 ، 1)	(3 ، 1)	(4 ، 1)	(5 ، 1)	(6 ، 1)
2	(1 ، 2)	(2 ، 2)	(3 ، 2)	(4 ، 2)	(5 ، 2)	(6 ، 2)
3	(1، 3)	(2، 3)	(3، 3)	(4، 3)	(5، 3)	(6، 3)
4	(1، 4)	(2، 4)	(3، 4)	(4، 4)	(5، 4)	(6، 4)
5	(1 ، 5)	(2 ، 5)	(3 ، 5)	(4 ، 5)	(5 ، 5)	(6 ، 5)
6	(1 ، 6)	(2 ، 6)	(3 ، 6)	(4 ، 6)	(5 ، 6)	(6 ، 6)

(2) عدد الحالات الممكنة لحدث أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين = 10

هى : {(6، 4) ، (5 ، 5) ، (4 ، 6) }

(3) عدد الحالات الممكنة لحدث أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين يساوى عدد زوجى هى:

{(1 ، 1)،(3 ، 1) ،(5، 1)،(2 ، 2)،(4 ، 2)،(6 ، 2)،(1، 3)،(3،3) ،

(5، 3) ، (2، 4) ، (4، 4)،(6، 4)،(1 ، 5)، (3 ، 5)، (5 ، 5)، (2 ، 6)،

(4 ، 6)، (6 ، 6)}.

مثال (5):

اذاتم سحب ورقة من أوراق اللعب (الكوتشينة) المطلوب ايجاد فضاء العينة لهذه التجربة.

الحل

عدد الحالات الكلية = 52 (وهى تمثل عدد أوراق اللعب)

ونجد أن الـ 52 ورقة والتى تمثل فضاء العينة لهذه التجربة مقسمة كالتالى:

52 ورقة

26 ورقة حمراء | 26 ورقة سوداء

13 ورقة قلب	13 ورقة دينارى	13 ورقة بستونى	13 ورقة سباتى
♥	♦	♣	♠
1 آس	1 آس	1 آس	1 آس
2	2	2	2
3	3	3	3
.	.	.	.
.	.	.	.
10	10	10	10
ولد	ولد	ولد	ولد
بنت	بنت	بنت	بنت
شايب	شايب	شايب	شايب

أنواع الأحداث:-

1- الأحداث المؤكدة.

2- الأحداث المستحيلة.

3- الأحداث المتنافية.

4- الأحداث المستقلة.

1- الأحداث المؤكدة: Sure Events

هى نتائج لابد من وقوعها أو حدوثها ، فمثلا اذا كان لدينا صندوق يحتوى على كرات حمراء فقط وسحبنا كرة من هذا الصندوق فإنها سوف تكون من المؤكد حمراء، واذا ألقينا قطعة عملة متكاملة التوازن فعندما تستقر العملة سيظهر حتما إما صورة أو كتابة.

2- الأحداث المستحيلة: Impossible Events

هى الأحداث أو النتائج المستحيل وقوعها ، فمثلا اذا تم رمى زهرة نرد متكاملة التوازن مرة واحدة فإن حادث ظهور الرقم 7 حادث مستحيل.

3- الأحداث المتنافية: Mutually Exclusive Events

يطلق على مجموعة من الأحداث فى تجربة معينة أنها أحداث متنافية اذا كان من المستحيل أن يتحقق حدوث أكثر من حدث فى نفس الوقت، نظرا لأن حدوث أحد هذه الأحداث يمنع حدوث أى حدث آخر، فيعتبر حدث ظهور الكتابة وحدث ظهور

الصورة فى تجربة القاء قطعة عملة مرة واحدة أحداث متنافية كما أن حدث ظهور رقما فرديا وحدث ظهور رقما زوجيا فى تجربة رمى زهرة النرد أحداث متنافية.

4- الأحداث المستقلة: Independent Events

يقال على حدثين أنهما مستقلان اذا كان حدوث أحدهما لايغير ولايؤثر فى وقوع الحدث الآخر ، فمثلا عند القاء قطعتى عملة مرة واحدة فنتائج العملة الأولى لاعلاقة لها بنتائج العملة الثانية ، بمعنى أن ظهور الصورة من العملة الأولى لايمنع ولايؤثر فى ظهور الصورة من العملة الثانية.

طرق حساب الاحتمال:

يتم حساب الاحتمال وفقا لعدة أساليب نذكر منها ما يلى:

1- الأسلوب الكلاسيكى (التقليدى).

2- الأسلوب التجريبى.

أولا: الأسلوب الكلاسيكى (التقليدى):

يفترض هذا الأسلوب الآتى:

1- فضاء العينة (ف) به عدد محدود من العناصر

$$ف = \{ و_1، و_2، ....، و_ن \}$$

2- كل النتائج الأولية لها نفس فرصة الحدوث أى ان :

$$ح\,(و_1) = ح\,(و_2) = ... ح\,(و_ن) = \frac{1}{ن}$$

وبالتالى فاذا كان الحدث أ يتكون من عدد $م \geq ن$ من النتائج الأولية فإن:

$$ح(أ) = \frac{م}{ن} = \frac{\text{عدد النتائج الأولية المكونة للحدث أ}}{\text{عدد النتائج الأولية الممكنة}}$$

ثانيا : الأسلوب التجريبى:

يتضح من التعريف الكلاسيكى للاحتمال أنه يعتمد على عدة فروض أساسية منها افتراض ان الحالات الممكنة كلها حالات متماثلة وهذا الفرض يترتب عليه أن الحالات الممكنة تكون متساوية الاحتمالات.

هذا الفرض ليس دائما متوافرا فى كل ما نصادفه من تجارب وظواهر طبيعية ، فمثلا اذا حاولنا معرفة احتمال أن يكون المولود ذكرا سنجد أن الحالات الممكنة حالتان فقط (ذكر ، أنثى) وهما ليسا متماثلين لأنه من المعروف احصائيا أن نسبة المواليد الذكور أكبر من نسبةالمواليد الإناث ، لذلك فإن التعريف الكلاسيكى تعريفا غير شامل أو لاينطبق الا فى حدود ضيقة جدا فى مجال ألعاب الصدفة مما دفع علماء الرياضة الى وضع تعريف شامل يعتمد على التجربة والملاحظة وحصر الحالات التى يتحقق فيها الحدث المرغوب حساب احتماله وهذا التعريف يسمى بالتعريف التجريبى للاحتمال.

التعريف التجريبى للاحتمال:

إذا كررنا تجربة معينة عدة مرات عددها ن (تحت نفس الظروف) ولاحظنا ان حادثا معينا (أ) قد تحقق فى م من هذه المرات فان النسبة $\frac{م}{ن}$ تسمى التكرار النسبى للحدث أو تعتبر قيمة تجريبية لاحتمال وقوع هذا الحدث وتقترب هذه القيمة التقريبية من احتمال وقوع الحدث أ كلما كبرت ن حتى أنه عندما تصبح ن كبيرة كبرا لانهائيا تصبح هذه القيمة التقريبية هى احتمال وقوع الحدث أ ويكون احتمال وقوع الحدث أ هو:

$$ح(أ) = نها_{ن \to \infty} \frac{م}{ن}$$

وتوضح الأمثلة التالية كيفية حساب الاحتمال باستخدام الأسلوب التقليدى.

مثال (6):

اذا تم رمى زهرة نرد مرة واحدة اوجد ما يلى:

(1) فضاء العينة لهذه التجربة.

(2) احتمال الحصول على الرقم 5 .

(3) احتمال الحصول على رقم فردى.

(4) احتمال الحصول على رقم زوجى.

(5) احتمال الحصول على رقم أكبر من 1.

(6) احتمال الحصول على رقم أصغر من 4.

الحل

(1) فضاء العينة للتجربة (ف) = {1،2،3،4،5،6}

= 6 حالات (عدد النتائج الأولية الممكنة)

(2) احتمال الحصول على الرقم 5 = $\frac{1}{6}$

(3) عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم فردى هى { 1 ، 3 ، 5 }= 3 حالات

∴ احتمال الحصول على رقم فردى = $\frac{3}{6}$

(4) عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم زوجى هى { 2، 4، 6 }= 3 حالات

∴ احتمال الحصول على رقم زوجى = $\frac{3}{6}$

(5) عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم أكبر من 1 هى { 2، 3، 4، 5، 6 }= 5 حالات

∴ احتمال الحصول على رقم أكبر من 1 = $\frac{5}{6}$

(6) عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم أصغر من 4 هى { 1، 2، 3 }= 3 حالات

∴ احتمال الحصول على رقم أصغر من 4 = $\frac{3}{6}$

مثال (7):

اذا تم القاء قطعة عملة متكاملة التوازن مرتين أو (القاء قطعتين عملة متكاملتى التوازن مرة واحدة) اوجد مايلى:

(1) فضاء العينة لهذه التجربة.

(2) احتمال ظهور صورتين.

(3) احتمال ظهور صورة وكتابة.

الحل

(1) عدد الحالات الكلية = 2 X 2 = 4

ويمكن توضيح عدد الحالات الممكنة عند القاء قطعة عملة متكاملة التوازن مرتين أو (القاء قطعتين عملة متكاملتى التوازن مرة واحدة) من خلال الجدول التالى:

الحالات	الرمية الأولى	الرمية الثانية
1	ص	ص
2	ص	ك
3	ك	ص
4	ك	ك

(2) عدد الحالات الممكنة لظهور صورتين هى {(ص ، ص)} = حالة واحدة فقط

∴ احتمال ظهور صورتين = $\frac{1}{4}$

(3) عدد الحالات الممكنة لظهور صورة وكتابة هى {(ص ، ك) ، (ك ، ص)} = حالتين

∴ احتمال ظهور صورة وكتابة = $\frac{2}{4}$

مثال (8):

اذا تم القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) اوجد مايلى:

(1) فضاء العينة لهذه التجربة.

(2) احتمال الحصول على أشكال متشابهة.

(3) احتمال الحصول على صورتين وكتابة.

الحل

عدد الحالات الكلية = $2 \times 2 \times 2 = 8$

ويمكن توضيح عدد الحالات الممكنة عند القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) من خلال الجدول التالى:

الحالات	الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة
1	ص	ص	ص
2	ص	ص	ك
3	ص	ك	ص
4	ص	ك	ك
5	ك	ص	ص
6	ك	ص	ك
7	ك	ك	ص
8	ك	ك	ك

(1) ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ،(ص ،ك، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}

(2) عدد الحالات الممكنة للحصول = {(ص ، ص ، ص)، (ك ، ك ، ك)}

على أشكال متشابهة = 2

∴ احتمال الحصول على أشكال متشابهة = $\frac{2}{8}$

(3) عدد الحالات الممكنة للحصول على صورتين وكتابة = { (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص) } = 3 حالات

∴ احتمال الحصول على أشكال متشابهة = $\frac{3}{8}$

مثال (9):

اذا تم رمى زهرة نرد متكاملة التوازن مرتين أو (رمى زهرتى نرد متكاملتى التوازن مرة واحدة) اوجد ما يلى :

(1) فضاء العينة لهذه التجربة.

(2) احتمال أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين = 10.

(3) احتمال أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين يساوى عدد زوجى.

الحل

عدد الحالات الكلية = 6 X 6 = 36

(1) ويمكن بيان فضاء العينة لهذه التجربة فى الجدول الآتى:

الثانية / الأولى	1	2	3	4	5	6
1	(1 ، 1)	(2 ، 1)	(3 ، 1)	(4 ، 1)	(5 ، 1)	(6 ، 1)
2	(1 ، 2)	(2 ، 2)	(3 ، 2)	(4 ، 2)	(5 ، 2)	(6 ، 2)
3	(1، 3)	(2، 3)	(3، 3)	(4، 3)	(5، 3)	(6، 3)
4	(1، 4)	(2، 4)	(3، 4)	(4، 4)	(5، 4)	(6، 4)
5	(1 ، 5)	(2 ، 5)	(3 ، 5)	(4 ، 5)	(5 ، 5)	(6 ، 5)
6	(1 ، 6)	(2 ، 6)	(3 ، 6)	(4 ، 6)	(5 ، 6)	(6 ، 6)

(2) عدد الحالات الممكنة لحدث أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين = 10

هى : {(4 ،6) ، (5 ، 5) ، (6 ، 4) } = 3 حالات

∴ احتمال أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين يساوى 10= $\frac{3}{36}$

(3) عدد الحالات الممكنة لحدث أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين يساوى عدد زوجى هى:

{(1 ، 1)،(1 ، 3)، (1 ،5)،(2 ، 2)،(2 ، 4)،(2 ، 6)،(3 ، 1)،(3،3) ،

(3 ،5) ، (4 ،2) ، (4 ،4)،(4 ،6)،(5 ، 1)،(5 ، 3)، (5 ، 5)، (6 ، 2)،

(6 ، 4)، (6 ، 6)} = 18 حالة

∴ احتمال أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين يساوى عدد زوجى = $\frac{18}{36}$

مثال (10):

اذاتم سحب ورقة من أوراق اللعب (الكوتشينة) المطلوب:

(1) ايجاد فضاء العينة لهذه التجربة.
(2) احتمال ظهور صورة.
(3) احتمال أن الورقة تحمل رقم 10.
(4) احتمال أن الورقة من نوع البستونى.
(5) احتمال أن الورقة بنت من نوع القلب.

الحل

(1) عدد الحالات الكلية = 52 (وهى تمثل عدد أوراق اللعب)

ونجد أن الـ 52 ورقة والتى تمثل فضاء العينة لهذه التجربة مقسمة كالتالى:

52 ورقة

26 ورقة حمراء — 26 ورقة سوداء

13 ورقة قلب	13 ورقة دينارى	13 ورقة بستونى	13 ورقة سباتى
♥	♦	♣	♠
1 آس	1 آس	1 آس	1 آس
2	2	2	2
3	3	3	3
.	.	.	.
.	.	.	.
10	10	10	10
ولد	ولد	ولد	ولد
بنت	بنت	بنت	بنت
شايب	شايب	شايب	شايب

(2) عدد الحالات الممكنة لظهور صورة = 12

∴ احتمال ظهور صورة = $\frac{12}{52}$

(3) عدد الحالات الممكنة أن الورقة تحمل رقم 10 = 4

∴ احتمال أن الورقة تحمل رقم 10 = $\frac{4}{52}$

(4) عدد الحالات الممكنة أن الورقة من نوع البستونى = 13

∴ احتمال أن الورقة من نوع البستونى = $\frac{13}{52}$

(5) عدد الحالات الممكنة أن الورقة بنت من نوع القلب = حالة واحدة فقط

∴ احتمال أن الورقة بنت من نوع القلب = $\frac{1}{52}$

مثال (11):

صندوق يحتوى على 4 كرات سوداء ، 6 كرات حمراء ، 3 كرات بيضاء ، 7 كرات صفراء فإذا تم سحب كرة من الصندوق اوجد ما يلى:

1- احتمال أن الكرة سوداء.

2- احتمال أن الكرة حمراء.

3- احتمال أن الكرة بيضاء.

4- احتمال أن الكرة صفراء.

5- احتمال أن الكرة ليست حمراء.

الحل

صفراء	بيضاء	حمراء	سوداء
7	3	6	4

عدد الحالات الكلية الممكنة = مجموع الكرات التى فى الصندوق

∴ عدد الحالات الكلية الممكنة = 4 +6 + 3 + 7 = 20 كرة

1- احتمال أن الكرة سوداء = $\frac{4}{20}$

2- احتمال أن الكرة حمراء = $\frac{6}{20}$

3- احتمال أن الكرة بيضاء = $\frac{3}{20}$

4- احتمال أن الكرة صفراء= $\frac{7}{20}$

5- احتمال أن الكرة ليست حمراء = احتمال أن الكرة سوداء <u>أو</u> بيضاء <u>أو</u> صفراء

$$= \frac{4}{20} + \frac{3}{20} + \frac{7}{20}$$

$$= \frac{14}{20}$$

حل آخر:

احتمال أن الكرة ليست حمراء = 1 – احتمال أن الكرة حمراء

$$= 1 - \frac{6}{20}$$

$$= \frac{14}{20}$$

من الحل السابق يمكن استنتاج العلاقة الآتية:

احتمال حدوث حدث معين = 1 – احتمال عدم حدوثه

أى أن:

ح (أ) = 1 – ح (أ′)

وفى هذه الحالة يقال أن الحدثين أ ، أ′ حدثين متكاملين.

<u>الاحتمال المركب :</u>

ناقشنا فيما سبق كيفية حساب الاحتمال البسيط وهو الخاص بايجاد احتمال حدوث حدث واحد فقط ، ونناقش فيما يلى كيفية حساب الاحتمال المركب والخاص بايجاد احتمال حدوث أكثر من حدث واحد.

<u>أنواع الاحتمال المركب:</u>

يتكون الاحتمال المركب من الأنواع التالية :

احتمال التقاطع	احتمال الاتحاد	الاحتمال الشرطى
ح (أ ∩ ب)	ح (أ U ب)	ح (أ / ب)

احتمال التقاطع (قانون ضرب الاحتمالات):

يهتم احتمال التقاطع بايجاد احتمال حدوث الحدثين أ و ب معا وعند ايجاد هذا الاحتمال يتم التفرقة بين الحالتين الآتيتين :

اذا كان أ ، ب حدثان مستقلان

أى أن حدوث أحدهما لايؤثر فى الآخر

فإن

$$\boxed{\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}) \times \text{ح}(\text{ب})}$$

اذا كان أ ، ب حدثان غيرمستقلان

أى أن حدوث أحدهما يؤثر فى الآخر

فإن

$$\boxed{\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب}) \neq \text{ح}(\text{أ}) \times \text{ح}(\text{ب})}$$

ملاحظة هامة :

اذا كانت بيانات التمرين فى صورة جدول وكان المطلوب ايجاد احتمال حدوث الحدثين أ و ب معا فإن:

$$\boxed{\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{\text{عدد الحالات المشتركة بين أ،ب}}{\text{عدد الحالات الكلية}}}$$

احتمال الاتحاد (قانون جمع الاحتمالات) :

يهتم احتمال الاتحاد بايجاد احتمال حدوث الحدثين أ أو ب ، ويقصد بذلك احتمال حدوث أحدهما على الأقل.

القانون المستخدم:

$$\boxed{\text{ح}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}) + \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})}$$

وعند ايجاد احتمال الاتحاد يتم التفرقة بين الحالتين الآتيتين:

اذا كان الحدثان أ ، ب حدثان متنافيان

أى أن حدوث أحدهما يمنع حدوث الآخر

$\boxed{\therefore ح\,(أ \cap ب) = صفر}$

اذا كان الحدثان أ ، ب حدثان

غير متنافيان

$\boxed{\therefore ح\,(أ \cap ب) \neq صفر}$

الاحتمال الشرطى:

يهتم الاحتمال الشرطى بايجاد احتمال حدوث حدث معين وذلك مع علمنا بحدوث حدث آخر.

القانون المستخدم:

$$\boxed{ح\,(أ / ب) = \frac{ح\,(أ \cap ب)}{ح\,(ب)}}$$

حيث :

أ $\Longleftarrow$ هو الحدث المطلوب ايجاد احتماله ويأتى فى التمرين بعد أحد العبارات الآتية:

- احسب احتمال.
- ماهو احتمال؟

ب ⟸ هو الحدث المعلوم ويأتى فى التمرين بعد أحد العبارات الآتية:

- اذا تبين أن.
- اذا علمنا أن.
- اذا كان.
- اذا وجدت أن.
- بشرط أن.

مثال (12):

اذا كان ح (أ) = 4, ، ح (ب) = 3, ، ح (أ ∩ ب) = 1,

اوجد ما يلى :

(1) ح (أ U ب).
(2) ح (أ / ب).
(3) ح (أ′).
(4) ح (ب′).
(5) ح (أ ∩ ب′).
(6) ح (أ′ ∩ ب).
(7) ح (أ U ب′).
(8) ح (أ′ U ب′).
(9) ح (أ′ ∩ ب′).
(10) هل الحدثين أ ، ب حدثين مستقلين؟
(11) هل الحدثين أ ، ب حدثين متنافيين؟

(12) هل الحدثين أ ، ب حدثين متكاملين؟

الحل

(1) $\text{ح}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}) + \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})$

$= ,4 + ,3 - ,1 = ,6$

(2) $\text{ح}(\text{أ} / \text{ب}) = \dfrac{\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})}$

$= \dfrac{,1}{,3} = \dfrac{1}{3}$

(3) $\text{ح}(\text{أ}') = 1 - \text{ح}(\text{أ})$

$= 1 - ,4 = ,6$

(4) $\text{ح}(\text{ب}') = 1 - \text{ح}(\text{ب})$

$= 1 - ,3 = ,7$

(5) $\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب}')$ ⟸ معناها احتمال حدوث الحدث (أ) وعدم حدوث الحدث (ب).

$\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب}') = \text{ح}(\text{أ}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})$

$= ,4 - ,1 = ,3$

(6) $\text{ح}(\text{أ}' \cap \text{ب})$ ⟸ معناها احتمال حدوث الحدث (ب) وعدم حدوث الحدث (أ).

ح (أَ ∩ ب) = ح (ب) − ح (أ ∩ ب)

= ,3 − ,1 = ,2

(7) ح (أ U بَ) ⟸ معناها احتمال حدوث الحدث (أ) أو عدم حدوث الحدث (ب)

ح (أ U بَ) = ١ − ح (ب) + ح (أ ∩ ب)

= ١ − ,3 + ,1 = ,8

(8) ح (أَ U بَ) ⟸ معناها احتمال عدم حدوث الحدث (أ) أو عدم حدوث الحدث (ب)

ح (أَ U بَ) = ح (أ ∩ ب)َ

= ١ − ح (أ ∩ ب)

= ١ − ,1 = ,9

(9) ح (أَ ∩ بَ) ⟸ معناها احتمال عدم حدوث الحدث (أ) و عدم حدوث الحدث (ب)

ح (أَ ∩ بَ) = ح (أ U ب)َ

= 1 − ح (أ U ب)

= 1 − ,6 = ,4

(10) يقال للحدثين أ ، ب أنهما حدثان مستقلان اذا توافر الشرط الآتى:

ح (أ ∩ ب) = ح (أ) X ح (ب)

ومن بيانات التمرين نجد أن :

ح (أ ∩ ب) ≠ ح (أ) X ح (ب)

,1 ≠ ,4 X ,3

,1 ≠ ,12

∴ أ ، ب حدثان غير مستقلان.

(11) يقال للحدثين أ ، ب أنهما حدثان متنافيان اذا توافر الشرط الاتى :

ح (أ ∩ ب) = صفر

ومن بيانات التمرين نجد أن :

ح (أ ∩ ب) = ,1

أى أن:

ح (أ ∩ ب) ≠ صفر

∴ أ ، ب حدثان غير متنافيان.

(12) يقال للحدثين أ ، ب أنهما حدثان متكاملان اذا توافر الشرط الاتى :

ح (أ) + ح (ب) = 1

ومن بيانات التمرين نجد أن :

ح (أ) + ح (ب) = ,4 + ,3 = ,7

أى أن:

ح (أ) + ح (ب) ≠ 1 ∴ أ ، ب حدثان غير متكاملان

مثال (١٣):

اذا كان احتمال نجاح الطالب أ فى امتحان ما هو ٥, واحتمال نجاح الطالب ب فى نفس الامتحان هو ٦٥, ، وكان احتمال نجاحهما معا هو ٤, اوجد مايلى:

(١) احتمال نجاح أحدهما على الأقل فى الامتحان.

(٢) احتمال نجاح الطالب أ وعدم نجاح الطالب ب.

(٣) احتمال نجاح أحدهما فى الامتحان دون الآخر.

الحل

ح (أ) = ٥,   ح (ب) = ٦٥,   ح (أ ∩ ب) = ٤,

(١) احتمال نجاح أحدهما على الأقل فى الامتحان = ح (أ U ب)

ح (أ U ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ ∩ ب)

= ٥, + ٦٥, − ٤, = ٧٥,

(٢) احتمال نجاح الطالب أ وعدم نجاح الطالب ب = ح (أ ∩ بَ)

ح (أ ∩ بَ) = ح (أ) − ح (أ ∩ ب)

= ٥, − ٤, = ١,

(٣) احتمال نجاح أحدهما فى الامتحان دون الآخر ⟸ معناها نجاح أ و عدم نجاح ب أو عدم نجاح أ ونجاح ب .

∴ احتمال نجاح أحدهما فى الامتحان دون الآخر = ح (أ ∩ بَ) + ح (أَ ∩ ب)

ح (أ ∩ بَ) = ١,

ح (أ′ ∩ ب) = ح (ب) – ح (أ ∩ ب)

= 65, – 4, = 25,

∴ احتمال نجاح أحدهما فى الامتحان دون الآخر = 1, + 25, = 35,

مثال (14):

اذا كان احتمال اصابة هدف معين من أحد الجنود أ هو 7, واحتمال اصابة نفس الهدف من جندى آخر ب هو 9, وبافتراض استقلال الحدثين أ ، ب اوجد مايلى:

(1) احتمال اصابة الهدف .

(2) احتمال اصابة الهدف من أ فقط.

الحل

ح (أ) = 7,   ح (ب) = 9,

بما أن الحدثين أ ، ب مستقلين

∴ ح (أ ∩ ب) = ح (أ) X ح (ب)

= 7, X 9, = 63,

(1) احتمال اصابة الهدف ⟸ معناها احتمال اصابة الهدف من أ <u>أو</u> ب

= ح (أ U ب)

ح (أ U ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∩ ب)

= 7, + 9, – 63, = 97,

(2) احتمال اصابة الهدف من أ فقط ⟸ معناها احتمال اصابة الهدف من أ و عدم اصابته من ب

∴ احتمال اصابة الهدف من أ فقط = ح (أ ∩ ب̄)

= ح (أ) − ح (أ ∩ ب)

= ,7 − ,63 = ,07

مثال (15):

فى أحد البحوث التسويقية تمت دراسة لمعرفة مدى تفضيل ربات البيوت لثلاثة أنواع مختلفة من مساحيق الغسيل وقد تمت هذه الدراسة على ثلاث مناطق سكنية مختلفة ويوضح الجدول التالى النتائج التى تم التوصل اليها من خلال هذه الدراسة:

المسحوق / المنطقة	ايريال	برسيل	تايد	المجموع
مصر الجديدة	60	50	40	150
مدينة نصر	35	40	25	100
شبرا	75	120	55	250
المجموع	170	210	120	500

فإذا تم اختيار احدى ربات البيوت بطريقة عشوائية ، المطلوب ايجاد الاحتمالات الآتية:

(1) احتمال ان تكون من سكان مصر الجديدة.

(2) احتمال ان تكون من سكان مدينة نصر.

(3) احتمال ان تكون من سكان شبرا.

(4) احتمال أن تكون ممن يفضلون مسحوق ايريال.

(5) احتمال أن تكون ممن يفضلون مسحوق برسيل.

(6) احتمال أن تكون ممن يفضلون مسحوق تايد.

(7) احتمال أن تكون ممن لا يفضلون مسحوق ايريال.

(8) احتمال ان تكون من سكان مصر الجديدة <u>و</u> تفضل مسحوق ايريال.

(9)احتمال أن تكون من سكان مدينة نصر <u>أو</u> تفضل مسحوق تايد.

(10) احتمال أن تكون من سكان مدينة نصر <u>أو</u> من سكان شبرا.

(11) <u>إذا علمنا</u> أنها تفضل مسحوق برسيل فما هو احتمال أنها من سكان شبرا؟

الحل

<u>ملاحظات هامة:</u>

- عدد الحالات الكلية الممكنة = 500
- نفرض أن حدث أنها من سكان مصر الجديدة هو ($أ_1$).
- نفرض أن حدث أنها من سكان مدينة نصر هو ($أ_2$).
- نفرض أن حدث أنها من سكان شبرا هو ($أ_3$).
- نفرض أن حدث أنها ممن يفضلون مسحوق ايريال هو ($ب_1$).
- نفرض أن حدث أنها ممن يفضلون مسحوق برسيل هو ($ب_2$).
- نفرض أن حدث أنها ممن يفضلون مسحوق تايد هو ($ب_3$).

(1) احتمال ان تكون من سكان مصر الجديدة = ح (أ$_1$)

$$\text{ح (أ}_1\text{)} = \frac{150}{500} = ,3$$

(2) احتمال ان تكون من سكان مدينة نصر = ح (أ$_2$)

$$\text{ح (أ}_2\text{)} = \frac{100}{500} = ,2$$

(3) احتمال ان تكون من سكان شبرا = ح (أ$_3$)

$$\text{ح (أ}_3\text{)} = \frac{250}{500} = ,5$$

(4) احتمال أن تكون ممن يفضلون مسحوق ايريال = ح (ب$_1$)

$$\text{ح (ب}_1\text{)} = \frac{170}{500} = ,34$$

(5) احتمال أن تكون ممن يفضلون مسحوق برسيل = ح (ب$_2$)

$$\text{ح (ب}_2\text{)} = \frac{210}{500} = ,42$$

(6) احتمال أن تكون ممن يفضلون مسحوق تايد = ح (ب$_3$)

$$\text{ح (ب}_3\text{)} = \frac{120}{500} = ,24$$

(7) احتمال أن تكون ممن لا يفضلون مسحوق ايريال = احتمال انها تفضل مسحوق برسيل **أو** مسحوق تايد

= ح (ب$_2$ **أو** ب$_3$)

= ح (ب$_2$ $\cup$ ب$_3$)

ح (ب$_2$ $\cup$ ب$_3$) = ح (ب$_2$) + ح (ب$_3$) − ح (ب$_2$ $\cap$ ب$_3$)

= $\frac{210}{500} + \frac{120}{500}$ − صفر

= $\frac{330}{500}$ = ,66

(8) احتمال ان تكون من سكان مصر الجديدة **و** تفضل مسحوق ايريال

= ح (أ$_1$ $\cap$ ب$_1$) = $\frac{60}{500}$ = ,12

(9) احتمال أن تكون من سكان مدينة نصر **أو** تفضل مسحوق تايد

= ح (أ$_2$ $\cup$ ب$_3$)

∴ ح (أ$_2$ $\cup$ ب$_3$) = ح (أ$_2$) + ح (ب$_3$) − ح (أ$_2$ $\cap$ ب$_3$)

= $\frac{100}{500} + \frac{120}{500} - \frac{25}{500}$

= $\frac{195}{500}$ = ,39

(10) احتمال أن تكون من سكان مدينة نصر **أو** من سكان شبرا = ح (أ$_2$ $\cup$ أ$_3$)

ح (أ$_2$ $\cup$ أ$_3$) = ح (أ$_2$) + ح (أ$_3$) − ح (أ$_2$ $\cap$ أ$_3$)

$$= \frac{100}{500} + \frac{250}{500} - \text{صفر}$$

$$= \frac{350}{500} = ,7$$

(11) **إذا علمنا** أنها تفضل مسحوق برسيل فما هو احتمال أنها من سكان شبرا؟

ملاحظة هامة :

ذكر في السؤال السابق عبارة **اذا علمنا أن**

∴ الاحتمال شرطى

الحدث المطلوب ايجاد احتماله هو الحدث ($أ_3$) وهو الحدث الذى يأتى بعد عبارة

ماهو احتمال أنها من سكان شبرا؟

الحدث المعلوم هو الحدث ($ب_2$) وهو الحدث الذى يأتى بعد عبارة **اذا علمنا أن.**

وفى هذه الحالة نجد ان:

إذا علمنا أنها تفضل مسحوق برسيل فما هو احتمال أنها من سكان شبرا؟

$$= ح\ (أ_3 / ب_2)$$

$$∴ ح\ (أ_3 / ب_2) = \frac{ح\ (أ_3 \cap ب_2)}{ح\ (ب_2)}$$

$$= \frac{\frac{120}{500}}{\frac{210}{500}} = \frac{120}{210} = ,57$$

مثال (16):

يحتوى صندوق على خمسة كرات بيضاء وثلاثة كرات حمراء فاذا تم سحب كرتين من هذا الصندوق بالتتابع فما هو احتمال أن الكرتين من اللون الأحمر وذلك عندما يتم السحب بالتتابع مع الإعادة ؟ ثم احسب نفس الاحتمال عندما يتم السحب بالتتابع مع عدم الإعادة ؟.

الحل

ملاحظة هامة :

اذا تم سحب كرات من صندوق يتم التفرقة بين الحالتين الآتيتين :

اذا كان السحب مع **الإعادة**

↓

فى هذه الحالة **لايتغير** عدد الكرات الموجودة فى الصندوق

اذا كان السحب مع **عدم الإعادة**

↓

فى هذه الحالة **يقل** عدد الكرات الموجودة فى الصندوق بمقدار **كرة واحدة**

بيضاء	حمراء
5	3

عدد الكرات فى الصندوق = 5 + 3 = 8

احتمال سحب كرة بيضاء = $\frac{5}{8}$

احتمال سحب كرةحمراء = $\frac{3}{8}$

<u>أولا: عندما يتم السحب مع الإعادة:</u>

ح (أن الكرتين من اللون الأحمر) = ح (أنها فى الأولى حمراء <u>و</u> فى الثانية حمراء)

بما أن الحدثين مستقلين

∴ ح (أن الكرتين من اللون الأحمر) = $\frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

<u>أولا: عندما يتم السحب مع عدم الإعادة:</u>

ح (أن الكرتين من اللون الأحمر) = ح (أنها فى الأولى حمراء <u>و</u> فى الثانية حمراء)

بما أن الحدثين مستقلين

∴ ح (أن الكرتين من اللون الأحمر) = $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$

<u>شجرة الاحتمالات:</u>

يتم استخدام شجرة الاحتمالات اذا كان لدينا أكثر من تجربة وناتج كل تجربة من هذه التجارب يعتمد على ناتج التجربة السابقة لها.

ويجب الأخذ فى الاعتبار النقاط التالية عند رسم شجرة الاحتمالات:

(1) يتم رسم شجرة خاصة بكل تجربة.

(2) مجموع الاحتمالات على فروع الشجرة الواحدة = واحد صحيح

(3) عند ايجاد الاحتمالات على نفس الفرع نقوم **بضرب** الاحتمالات.

(4) عند الانتقال من فرع الى فرع آخر نقوم **بجمع** الاحتمالات.

مثال (17):

رميت قطعة عملة مرة واحدة فاذا ظهرت صورة يتم رمى زهرة نرد مرة واحدة واذا ظهرت كتابة يتم سحب كرة من صندوق به خمس كرات حمراء وثلاث كرات بيضاء والمطلوب:

(1) ارسم شجرة الاحتمالات.

(2) اوجد احتمال الحصول على الرقم 5 من زهرة النرد.

(3) اوجد احتمال الحصول على كرة حمراء.

(4) اوجد احتمال الحصول على كرة بيضاء.

الحل

نلاحظ فى هذا التمرين أن لدينا أكثر من تجربة وناتج كل تجربة من هذه التجارب يعتمد على ناتج التجربة السابقة لها، ويمكن توضيح ذلك كما يلى:

التجربة الأولى:

رمى قطعة عملة مرة واحدة

عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة = { صورة ، كتابة }

$= 2$

احتمال ظهور الصورة $= \frac{1}{2}$

احتمال ظهور الكتابة $= \frac{1}{2}$

<u>التجربة الثانية:</u>

رمى زهرة نرد مرة واحدة

فى

حالة ظهور الصورة

عدد الحالات الممكنة

$= \{6،5،4،3،2،1\}$

سحب كرة من صندوق

فى

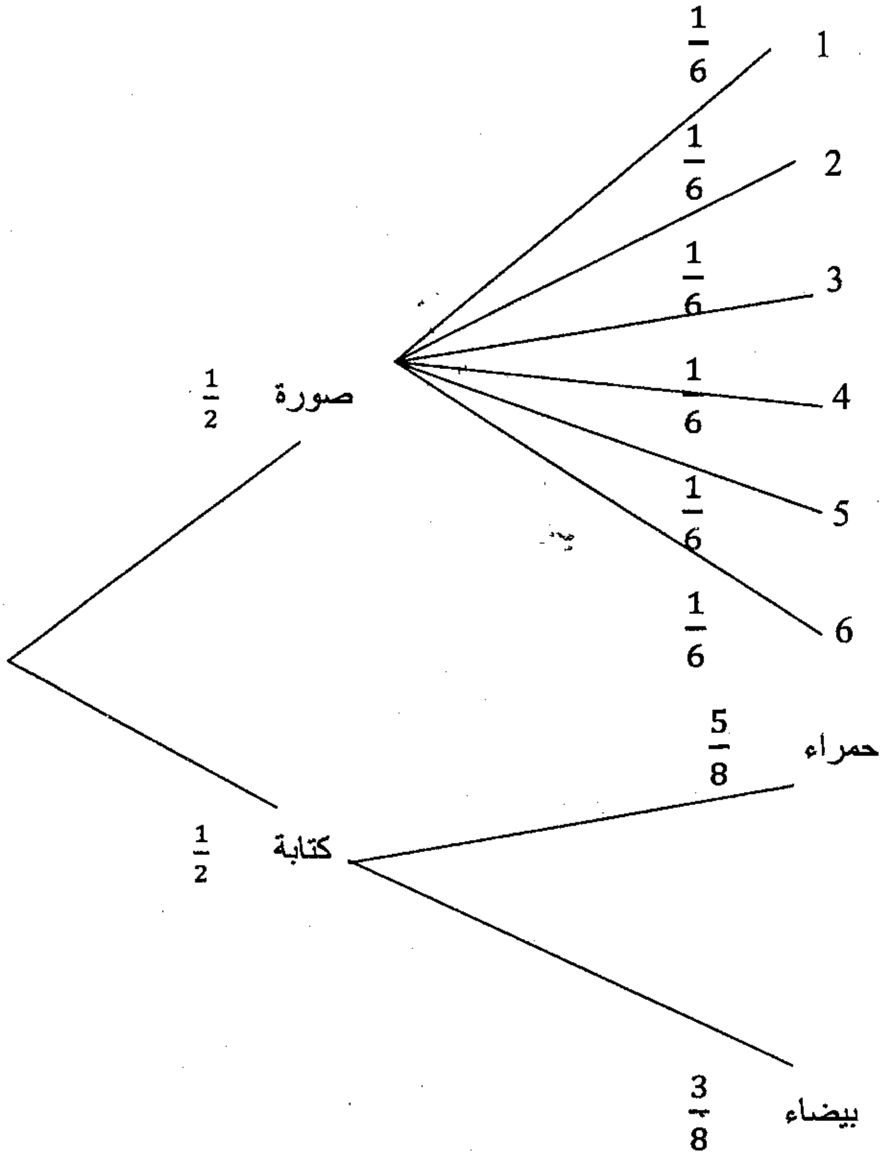
حالة ظهور الكتابة

عدد الحالات الممكنة

= عدد الكرات فى الصندوق

$= 5 + 3 = 8$

(1) رسم شجرة الاحتمالات:



(2) احتمال الحصول على الرقم 5 من زهرة النرد = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

(3) احتمال الحصول على كرة حمراء = $\frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$

(4) احتمال الحصول على كرة بيضاء = $\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$

مثال (18):

صندوق به 5 كرات بيضاء ، 7 كرات حمراء فاذا تم سحب كرتين بالتتابع من هذا الصندوق اوجد ما يلى:

(1) احتمال أن تكون الكرتين من اللون الأبيض.

(2) احتمال أن تكون كرة واحدة بيضاء.

(3) احتمال عدم وجود أى كرة بيضاء.

وذلك فى الحالات الآتية:

- اذا تم إعادة كل كرة قبل سحب الكرة التالية.
- اذا لم يتم إعادة كل كرة قبل سحب الكرة التالية.

الحل

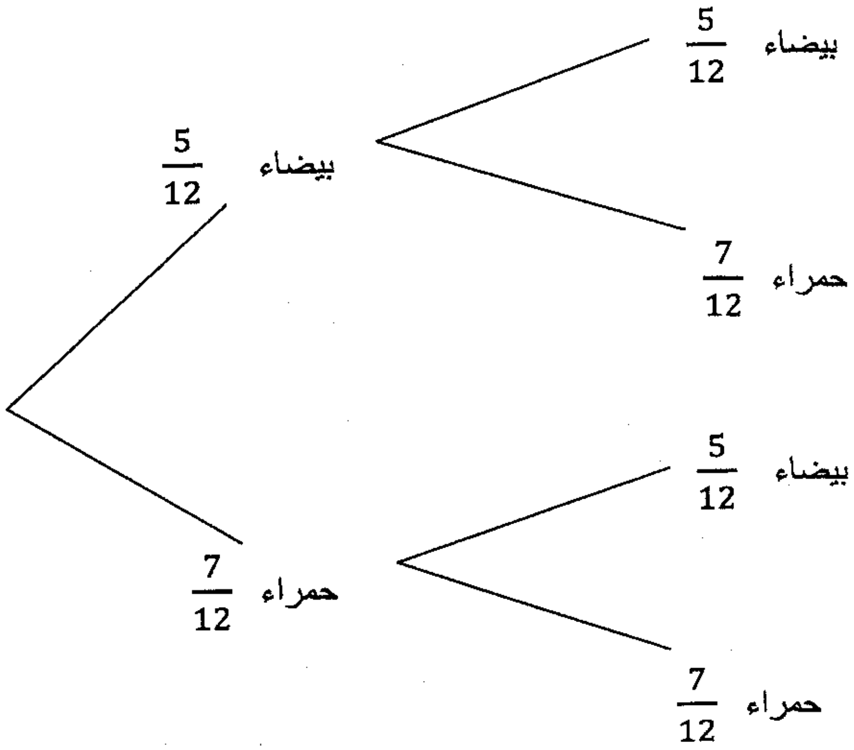
5	7
بيضاء	حمراء

عدد الكرات فى الصندوق = $5 + 7 = 12$

احتمال ان الكرة بيضاء = $\frac{5}{12}$

احتمال ان الكرة حمراء = $\frac{7}{12}$

أولا: اذا كان السحب مع الإعادة:



(1) احتمال أن الكرتين من اللون الأبيض = ح (أنها بيضاء **و** بيضاء)

في الأولى   في الثانية

$$= \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$$

(2) احتمال أن تكون كرة واحدة بيضاء = ح (أنها بيضاء في الأولى **و** حمراء في الثانية **أو** • حمراء في الأولى **و** بيضاء في الثانية)

$$= \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{12}$$

$$= \frac{35}{144} + \frac{35}{144}$$

$$= \frac{70}{144}$$

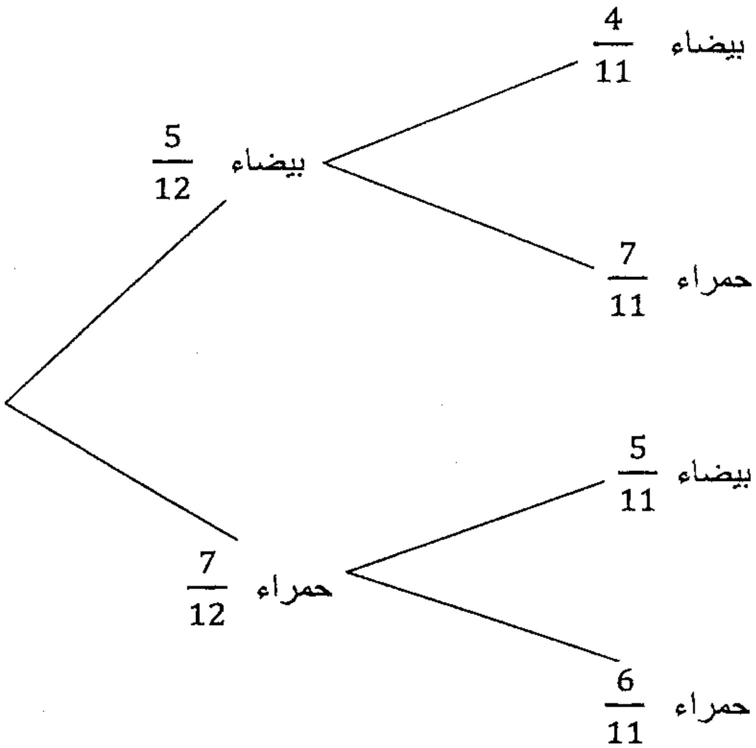
(3) احتمال عدم وجود أى كرة بيضاء = ح (أنها حمراء <u>و</u> حمراء)

فى الأولى فى الثانية

$$= \frac{7}{12} \times \frac{7}{12}$$

$$= \frac{49}{144}$$

<u>ثانيا: اذا كان السحب مع عدم الإعادة:</u>



(1) احتمال أن الكرتين من اللون الأبيض = ح (أنها بيضاء فى الأولى **و** بيضاء فى الثانية)

$$= \frac{5}{12} \text{X} \frac{4}{11} = \frac{20}{132}$$

(2) احتمال أن تكون كرة واحدة بيضاء = ح (أنها بيضاء فى الأولى **و** حمراء فى الثانية **أو** حمراء فى الأولى **و** بيضاء فى الثانية)

$$= \frac{5}{12} \text{X} \frac{7}{11} + \frac{7}{12} \text{X} \frac{5}{11}$$

$$= \frac{35}{132} + \frac{35}{132}$$

$$= \frac{70}{132}$$

(3) احتمال عدم وجود أى كرة بيضاء = ح (أنها حمراء فى الأولى و حمراء فى الثانية)

$$= \frac{7}{12} \times \frac{6}{11}$$

$$= \frac{42}{132}$$

مثال (19):

صندوق به 6 كرات بيضاء و4 كرات سوداء فاذا تم سحب ثلاث كرات بالتتابع من هذا الصندوق ارسم شجرة الاحتمالات ثم احسب احتمال أن تكون الثلاث كرات من نفس اللون وذلك فى الحالات الآتية:

أولا:- اذا تم إعادة كل كرة قبل سحب الكرة التالية.

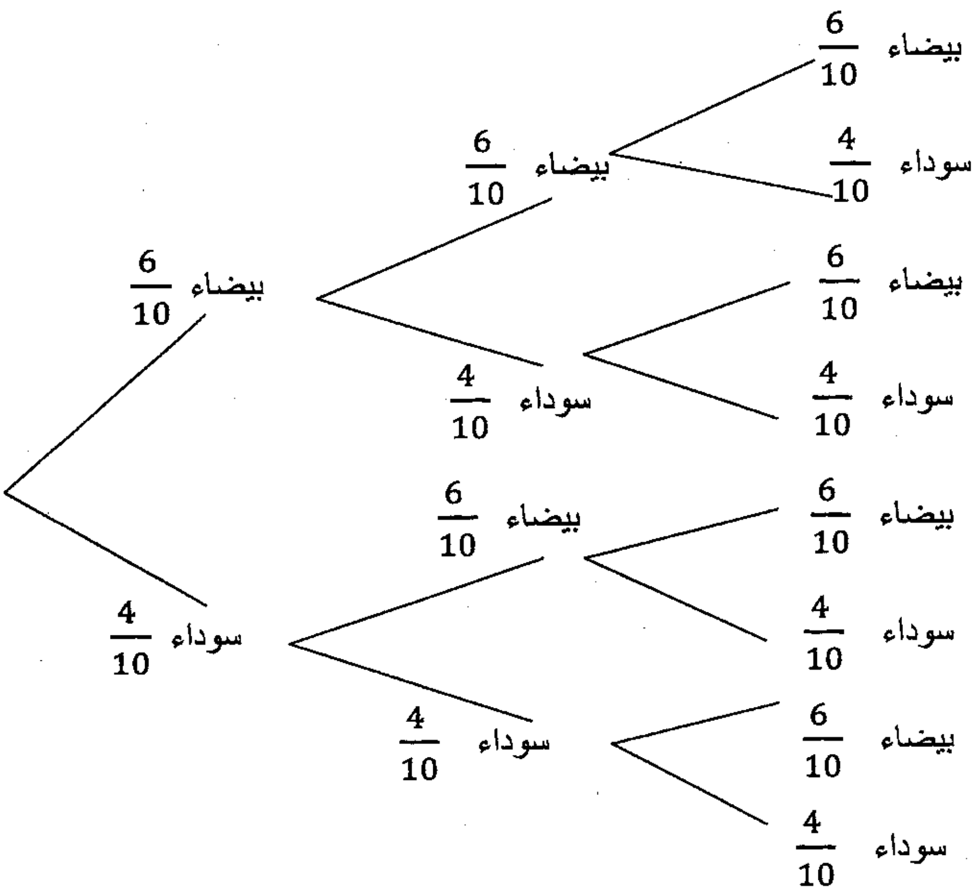
ثانيا:- اذا لم يتم إعادة كل كرة قبل سحب الكرة التالية.

الحل

6	4
بيضاء	سوداء

عدد الكرات فى الصندوق = 6 + 4 = 10

أولا: اذا كان السحب مع الإعادة:



احتمال أن الثلاث كرات = ح (أن الثلاث كرات **أو** أن الثلاث كرات)

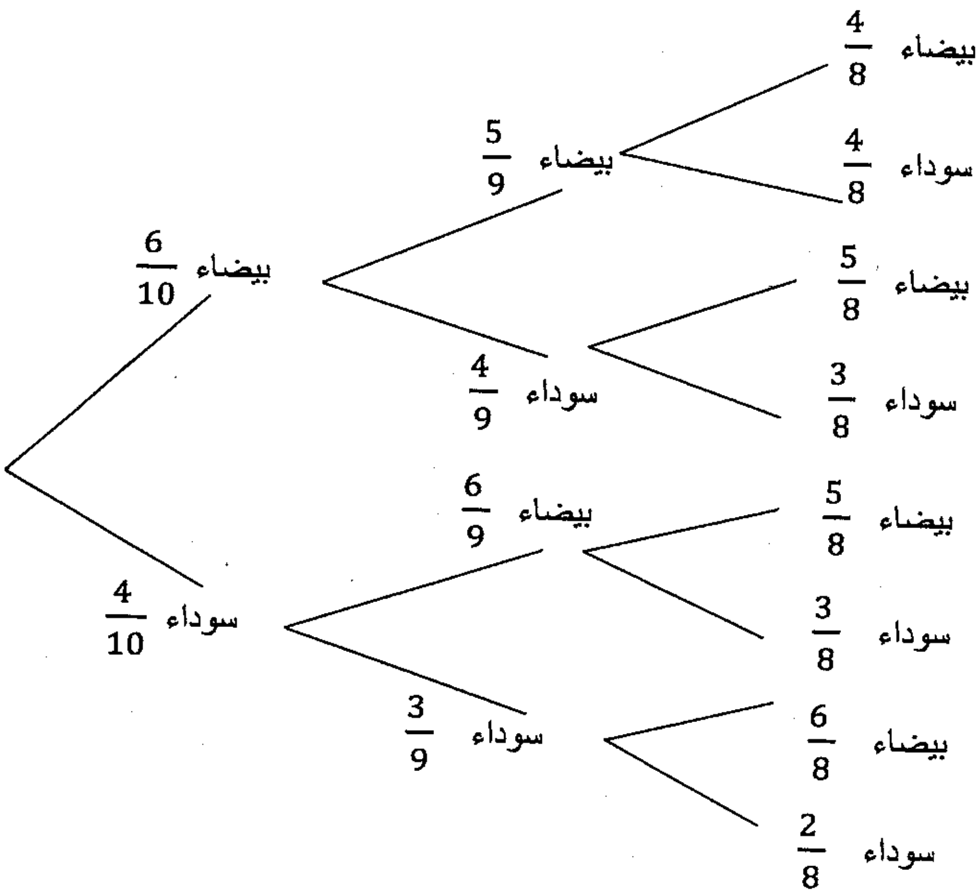
من نفس اللون بيضاء سوداء

$$\frac{4}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} =$$

$$\frac{64}{1000} + \frac{216}{1000} =$$

$$,28 = \frac{280}{1000} =$$

<u>ثانيا: اذا كان السحب مع الإعادة:</u>



احتمال أن الثلاث كرات = ح (أن الثلاث كرات **<u>أو</u>** أن الثلاث كرات)

من نفس اللون بيضاء سوداء

$$\frac{2}{8} X \frac{3}{9} X \frac{4}{10} + \frac{4}{8} X \frac{5}{9} X \frac{6}{10} =$$

$$\frac{24}{720} + \frac{120}{720} =$$

$$= \frac{144}{720} = ,2$$

مثال (20):

مصنع به آلتين لإنتاج الأجهزة الكهربائية بحيث تنتج الآلة الأولى 70% من الإنتاج والثانية 30% من الإنتاج وقد أثبتت الدراسات السابقة أن نسبة الإنتاج المعيب من الآلة الأولى 2% ، نسبة المعيب من الآلة الثانية 3% وعند الفحص **وجدت** وحدة معيبة والمطلوب :

(1) ماهو احتمال أن تكون هذه الوحدة من انتاج الآلة الأولى؟

(2) ماهو احتمال أن تكون هذه الوحدة من انتاج الآلة الثانية ؟

الحل

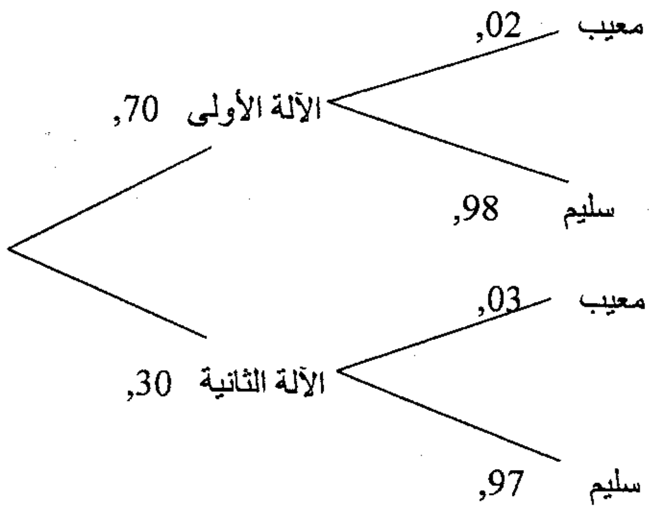
ملاحظة هامة :

ذكر فى التمرين السابق عبارة عند الفحص **وجدت** وحدة معيبة .

∴ الاحتمال شرطى.

∴ الحدث المعلوم هو أن الوحدة معيبة.

ويتم رسم شجرة الاحتمالات لهذه التجربة كما يلى:



نفرض ان حدث أن الانتاج من الآلة الأولى ⟸ أ

نفرض ان حدث أن الانتاج من الآلة الثانية ⟸ ب

نفرض ان حدث أن الوحدة معيبة ⟸ م

(1) الاحتمال المطلوب هو ح (أ / م)

$$\text{ح}\left(\text{أ}/\text{م}\right) = \frac{\text{ح}\left(\text{أ} \cap \text{م}\right)}{\text{ح}\left(\text{م}\right)}$$

البسط :

ح (أ ∩ م) ⟸ معناها احتمال أن الانتاج من الآلة الأولى

و الوحدة معيبة

∴ ح (أ ∩ م) = ,70 X ,02 = ,014

المقام:

ح (م) ⟸ معناها احتمال أن الوحدة معيبة

* ح (م) = ح (أنها من انتاج الآلة الأولى **أو** أنها من انتاج الآلة الثانية)

و معيبة   **و** معيبة

= $,02 \times ,70$ + $,03 \times ,30$

= $,014$ + $,009 = ,023$

* ح (أ / م) = $\frac{,014}{,023}$ = $,609$

(2) الاحتمال المطلوب هو ح (ب / م)

ح (ب / م) = $\frac{\text{ح (ب} \cap \text{م)}}{\text{ح (م)}}$

البسط :

ح (ب ∩ م) ⟸ معناها احتمال أن الانتاج من الآلة الثانية

و الوحدة معيبة

* ح (ب ∩ م) = $,03 \times ,30 = ,009$

المقام:

ح (م) ⟸ معناها احتمال أن الوحدة معيبة

∴ ح (م) = ح (أنها من انتاج الآلة الأولى <u>و</u> معيبة **أو** أنها من انتاج الآلة الثانية <u>و</u> معيبة)

$$= ,70 \text{ X } ,02 \quad + \quad ,30 \text{ X } ,03$$

$$= ,014 \quad + \quad ,009 = ,023$$

∴ ح (ب / م) $= \frac{,009}{,023} = ,391$

مثال (21):

تقوم احدى الشركات الصناعية بشراء احتياجاتها من المواد الخام اللازمة للانتاج من ثلاث شركات مختلفة حيث تقوم الشركة الأولى بتوريد 60% من المواد الخام وتقوم الشركة الثانية بتوريد 30% من المواد الخام وتقوم الشركة الثالثة بتوريد الباقى وقد اوضحت التعاملات مع هذه الشركات أن نسب المعيب فى الشحنة للشركات الثلاث هى 1% ، 2% ، 3% على الترتيب وعند الفحص <u>وجدت</u> شحنة معيبة اوجد مايلى:

(1) ماحتمال أن هذه الشحنة من الشركة الأولى؟

(2) ماحتمال أن هذه الشحنة من الشركة الثانية؟

(3) ماحتمال أن هذه الشحنة من الشركة الثالثة؟

الحل

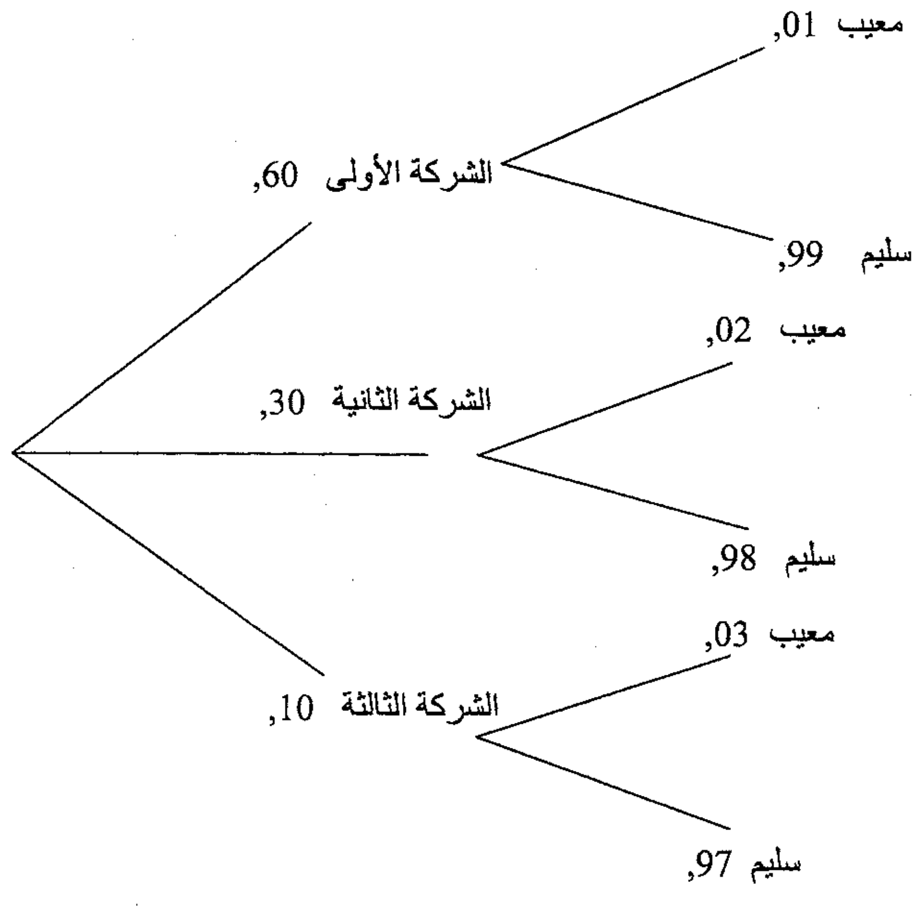
ملاحظة هامة :

ذكر فى التمرين السابق عبارة عند الفحص **وجدت** شحنة معيبة .

∴ الاحتمال شرطى.

∴ الحدث المعلوم هو أن الوحدة معيبة.

ويتم رسم شجرة الاحتمالات لهذه التجربة كما يلى:



نفرض ان حدث أن الشحنة من الشركة الأولى ⟸ أ

نفرض ان حدث أن الشحنة من الشركة الثانية ⟸ ب

نفرض ان حدث أن الشحنة من الشركة الثالثة ⟸ ج

نفرض ان حدث أن الشحنة معيبة ⟸ م

(1) الاحتمال المطلوب هو ح (أ / م)

$$ح\,(أ / م) = \frac{ح\,(أ \cap م)}{ح\,(م)}$$

البسط :

ح (أ ∩ م) ⟸ معناها احتمال أن الانتاج من الشركة الأولى <u>و</u> الشحنة معيبة

∴ ح (أ ∩ م) = ,60 X ,01 = ,006

المقام:

ح (م) ⟸ معناها احتمال أن الشحنة معيبة

∴ ح (م) = ح (أنها من الأولى <u>أو</u> أنها من الثانية <u>أو</u> أنها من الثالثة)

<u>و</u> معيبة　　<u>و</u> معيبة　　<u>و</u> معيبة

= ,60 X ,01 + ,30 X ,02 + ,10 X ,03

$$= ,006 + ,006 + ,003$$

$$= ,015$$

∴ ح (أ / م) = $\frac{,006}{,015}$ = ,4

(2) الاحتمال المطلوب هو ح (ب / م)

ح (ب / م) = $\frac{\text{ح (ب ∩ م)}}{\text{ح (م)}}$

البسط :

ح (ب ∩ م) ⟸ معناها احتمال أن الانتاج من الشركة الثانية

و الشحنة معيبة

∴ ح (ب ∩ م) = ,30 X ,02 = ,006

المقام:

ح (م) ⟸ معناها احتمال أن الشحنة معيبة

∴ ح (م) = ح (أنها من الأولى أو أنها من الثانية أو أنها من الثالثة)

و معيبة و معيبة و معيبة

$$= ,60 \text{ X } ,01 + ,30 \text{ X } ,02 + ,10 \text{ X } ,03$$

$$= ,006 + ,006 + ,003$$

$$= ,015$$

$$\therefore \text{ح}\,(\text{ب} / \text{م}) = \frac{,006}{,015} = ,4$$

(3) الاحتمال المطلوب هو ح (ج / م)

$$\text{ح}\,(\text{ج} / \text{م}) = \frac{\text{ح}\,(\text{ج} \cap \text{م})}{\text{ح}\,(\text{م})}$$

البسط :

ح (ج ∩ م) ⟸ معناها احتمال أن الانتاج من الشركة الثالثة
و الشحنة معيبة

$$\therefore \text{ح}\,(\text{ج} \cap \text{م}) = ,10 \text{ X } ,03 = ,003$$

المقام:

ح (م) ⟸ معناها احتمال أن الشحنة معيبة

∴ ح (م) = ح (أنها من الأولى **أو** أنها من الثانية **أو** أنها من الثالثة)

و معيبة ↓ و معيبة ↓ و معيبة

$$= ,60 \text{ X } ,01 + ,30 \text{ X } ,02 + ,10 \text{ X } ,03$$

$$= ,006 + ,006 + ,003$$

$$= ,015$$

$$\therefore \text{ح}\,(\text{ج} / \text{م}) = \frac{,003}{,015} = ,2$$

أمثلة متنوعة

مثال (1):

اذا تم القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) هل حدث الحصول على صورة من القطعة الأولى وحدث الحصول على أشكال متشابهة حدثان مستقلان ، متنافيان ، متكاملان؟.

الحل

عدد الحالات الكلية = $2 X 2 X 2 = 8$

ويمكن توضيح عدد الحالات الممكنة عند القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) من خلال الجدول التالى:

الحالات	الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة
1	ص	ص	ص
2	ص	ص	ك
3	ص	ك	ص
4	ص	ك	ك
5	ك	ص	ص
6	ك	ص	ك
7	ك	ك	ص
8	ك	ك	ك

نفرض ان حدث الحصول على صورة من القطعة الأولى $\Longleftarrow$ أ

نفرض ان حدث الحصول على أشكال متشابهة $\Longleftarrow$ ب

عدد الحالات الممكنة للحصول على صورة من القطعة الأولى = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ،(ص ، ك ، ك) } = 4 حالات

∴ ح (أ) = $\frac{4}{8}$

عدد الحالات الممكنة للحصول = {(ص ، ص ، ص)، (ك ، ك ، ك)}

على أشكال متشابهة = 2

∴ ح (ب) = $\frac{2}{8}$

(أ ∩ ب) $\Longleftarrow$ معناها عدد الحالات الممكنة لظهور صورة من القطعة الأولى و فى نفس الوقت الثلاث قطع متشابهة

= { (ص ، ص ، ص) } = حالة واحدة

∴ ح (أ ∩ ب) = $\frac{1}{8}$

ح (أ) X ح (ب) = $\frac{4}{8}$ X $\frac{2}{8}$ = $\frac{8}{64}$ = $\frac{1}{8}$

∴ ح (أ ∩ ب) = ح (أ) X ح (ب)

∴ أ ، ب حدثان مستقلان

بما أن ح (أ $\cap$ ب) $= \frac{1}{8} \neq$ صفر

∴ أ ، ب حدثان غير متنافيان

ح (أ) + ح (ب) $= \frac{4}{8} + \frac{2}{8}$

$= \frac{6}{8} \neq 1$

∴ أ ، ب حدثان غير متكاملان

مثال (2)

اذا كان أ ، ب حدثين متنافيين بحيث كان احتمال حدوث الحدث ب ثلاثة أمثال حدوث الحدث أ ، احتمال حدوث أحدهما على الأقل = 56, اوجد قيمة كل من ح (أ) ، ح (ب) ومن ثم احسب قيمة كل من :

(1) ح (أ $\cap$ ب$'$).

(2) ح (أ$'$ $\cap$ ب).

(3) ح (أ$'$ $\cap$ ب$'$).

الحل

بما أن أ ، ب حدثين متنافيين

∴ ح (أ ∩ ب) = صفر

بما أن احتمال حدوث أحدهما على الأقل = 56,

∴ ح (أ U ب) = 56,

بما أن احتمال حدوث الحدث ب ثلاثة أمثال حدوث الحدث أ

نفرض ان احتمال حدوث الحدث أ = س ⟸ ح (أ) = س

∴ احتمال حدوث الحدث ب = 3 س ⟸ ح (ب) = 3 س

ح (أ U ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ ∩ ب)

∴ 56, = س + 3 س - صفر

56, = 4س

∴ س = $\frac{,56}{4}$ = 14,

∴ ح (أ) = 14,

ح (ب) = 3 X 14, = 42,

(1) ح (أ ∩ بَ) = ح (أ) - ح (أ ∩ ب)

= 14, - صفر = 14,

(2) ح (أَ ∩ ب) = ح (ب) - ح (أ ∩ ب)

= 42, - صفر = 42,

(3) ح (أَ ∩ بَ) = 1 - ح (أ U ب) = 1 - 56, = 44,

مثال (3)

اذاتم سحب ورقة من أوراق اللعب (الكوتشينة) هل حدث سحب ورقة تحمل الرقم 10 وحدث أن الورقة سوداء حدثان مستقلان؟

الحل

عدد الحالات الكلية = 52 (وهى تمثل عدد أوراق اللعب)

ونجد أن الـ 52 ورقة والتى تمثل فضاء العينة لهذه التجربة مقسمة كالتالى:

52 ورقة

26 ورقة حمراء — 26 ورقة سوداء

13 ورقة قلب	13 ورقة دينارى	13 ورقة بستونى	13 ورقة سباتى
♥	♦	♣	♠
1 آس	1 آس	1 آس	1 آس
2	2	2	2
3	3	3	3
10	10	10	10
ولد	ولد	ولد	ولد
بنت	بنت	بنت	بنت
شايب	شايب	شايب	شايب

نفرض أن حدث أن الورقة تحمل الرقم 10 ⟸ أ

نفرض أن حدث أن الورقة سوداء ⟸ ب

$$ح(أ) = \frac{4}{52} = \frac{2}{26}$$

$$ح(ب) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

ح(أ ∩ ب) ⟸ معناها احتمال أن الورقة تحمل الرقم 10 و سوداء

$$ح(أ \cap ب) = \frac{2}{52}$$

$$ح(أ) \times ح(ب) = \frac{2}{26} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{52}$$

∴ ح(أ ∩ ب) = ح(أ) X ح(ب)

∴ أ ، ب حدثان مستقلان

مثال (4)

لدراسة ظاهرة التدخين بين طلاب جامعة عين شمس فقد تم أخذ عينة من طلاب ثلاث كليات مختلفة هى كلية التجارة ، كلية الآداب ، كلية الحقوق ويوضح الجدول التالى النتائج التى تم التوصل اليها:

الكلية / الصفة	التجارة	الآداب	الحقوق	المجموع
مدخن	60	50	40	150
غير مدخن	35	40	25	100
المجموع	95	90	65	250

فإذا تم اختيار أحد الطلاب بطريقة عشوائية ، المطلوب ايجاد الاحتمالات الآتية:

(1) احتمال ان يكون من طلبة كلية التجارة.

(2) احتمال ان يكون من طلبة كلية الآداب.

(3) احتمال ان يكون من طلبة كلية الحقوق.

(4) احتمال أن يكون مدخن.

(5) احتمال أن يكون غير مدخن.

(6) احتمال ان يكون من طلبة كلية التجارة <u>و</u> غير مدخن.

(7) احتمال ان يكون من طلبة كلية الحقوق <u>و</u> يدخن.

(8)احتمال أن ان يكون من طلبة كلية الآداب <u>أو</u> من طلبة كلية الحقوق.

(9) <u>إذا علمنا</u> أنه يدخن فما هو احتمال أنه من طلبة كلية التجارة ؟

الحل

<u>ملاحظات هامة:</u>

- عدد الحالات الكلية الممكنة = 250

- نفرض أن حدث ان يكون من طلبة كلية التجارة ($أ_1$).
- نفرض أن حدث ان يكون من طلبة كلية الآداب ($أ_2$).
- نفرض ان يكون من طلبة كلية الحقوق ($أ_3$).
- نفرض أن حدث أنه مدخن هو ($ب_1$).
- نفرض أن حدث أنه غيرمدخن هو ($ب_2$).

(1) احتمال ان يكون من طلبة كلية التجارة = ح ($أ_1$)

$$ح\,(أ_1) = \frac{95}{250} = ,38$$

(2) احتمال ان يكون من طلبة كلية الآداب = ح ($أ_2$)

$$ح\,(أ_2) = \frac{90}{250} = ,36$$

(3) احتمال ان يكون من طلبة كلية الحقوق = ح ($أ_3$)

$$ح\,(أ_3) = \frac{65}{250} = ,26$$

(4) احتمال أنه مدخن = ح ($ب_1$)

$$ح\,(ب_1) = \frac{150}{250} = ,6$$

(5) احتمال أنه غيرمدخن = ح ($ب_2$)

$$ح (ب_2) = \frac{100}{250} = 4,$$

(6) احتمال ان يكون من طلبة كلية التجارة **و** غير مدخن

$$= ح (أ_1 \cap ب_2) = \frac{35}{250} = 14,$$

(7) احتمال ان يكون من طلبة كلية الحقوق **و** مدخن

$$= ح (أ_3 \cap ب_1) = \frac{40}{250} = 16,$$

(8) احتمال أن ان يكون من طلبة كلية الآداب **أو** من طلبة كلية الحقوق

$$= ح (أ_2 \text{ أو } أ_3)$$

$$= ح (أ_2 \cup أ_3)$$

$$ح (أ_2 \cup أ_3) = ح (أ_2) + ح (أ_3) - ح (أ_2 \cap أ_3)$$

$$= \frac{90}{250} + \frac{65}{250} - \text{صفر}$$

$$= \frac{155}{250} = 62,$$

(9) **إذا علمنا** أنه يدخن فما هو احتمال أنه من طلبة كلية التجارة ؟

ملاحظة هامة :

ذكر فى السؤال السابق عبارة **اذا علمنا أن**

∴ الاحتمال شرطى

الحدث المطلوب ايجاد احتماله هو الحدث ($أ_1$) وهو الحدث الذى يأتى بعد عبارة **ماهو احتمال أنه من طلبة كلية التجارة؟**

الحدث المعلوم هو الحدث ($ب_1$) وهو الحدث الذى يأتى بعد عبارة **اذا علمنا أن.**

وفى هذه الحالة نجد ان:

<u>**إذا علمنا**</u> أنه يدخن فما هو احتمال أنه من طلبة كلية التجارة ؟

$$= ح (أ_1 / ب_1)$$

$$\therefore ح (أ_1 / ب_1) = \frac{ح (أ_1 \cap ب_1)}{ح (ب_1)}$$

$$= \frac{\frac{60}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{60}{150} = ,4$$

تمارين

(1) اذا تم القاء قطعة عملة متكاملة التوازن مرتين أو (القاء قطعتين عملة متكاملتى التوازن مرة واحدة) اوجد مايلى:

(أ) فضاء العينة لهذه التجربة.

(ب) احتمال ظهور أشكال متشابهة.

(ج) احتمال ظهور صورة وكتابة.

(2) اذا تم القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) اوجد مايلى:

(أ) فضاء العينة لهذه التجربة.

(ب) احتمال الحصول على أشكال متشابهة.

(ج) احتمال الحصول على كتابتين و صورة.

(3) اذا تم رمى زهرة نرد متكاملة التوازن مرتين أو (رمى زهرتى نرد متكاملتى التوازن مرة واحدة) اوجد ما يلى :

(أ) فضاء العينة لهذه التجربة.

(ب) احتمال أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين ≤ 7.

(ج) احتمال أن يكون مجموع النواتج على الزهرتين يساوى عدد فردى.

(4) اذاتم سحب ورقة من أوراق اللعب (الكوتشينة) المطلوب:

(أ) ايجاد فضاء العينة لهذه التجربة.

(ب) احتمال ظهور صورة.

(ج) احتمال أن الورقة تحمل رقم 8.

(د) احتمال أن الورقة من نوع الديناري.

(هـ) احتمال أن الورقة ولد من نوع البستوني.

(5) صندوق يحتوى على 5 كرات سوداء ، 8 كرات حمراء ، 7كرات بيضاء ، 10كرات صفراء فإذا تم سحب كرة من الصندوق اوجد ما يلى:

أ- احتمال أن الكرة سوداء.

ب- احتمال أن الكرة حمراء.

ج- احتمال أن الكرة بيضاء.

د- احتمال أن الكرة صفراء.

هـ - احتمال أن الكرة ليست حمراء.

(6) اذا كان ح (أ) = 45, ، ح (ب) = 35, ، ح (أ ∩ ب) = 1,

اوجد ما يلى :

(أ) ح (أ U ب).

(ب) ح (أَ)

(ج) ح (بَ)

(د) ح (أ ∩ بَ)

(هـ) ح (أَ ∩ ب)

(و) ح (أَ ∩ بَ)

(ى) هل الحدثين أ ، ب حدثين مستقلين ، متنافيين ، متكاملين؟

(7) اذا كان احتمال نجاح الطالب أ فى امتحان ما هو 6, واحتمال نجاح الطالب ب فى نفس الامتحان هو 65, ، وكان احتمال نجاحهما معا هو 4, اوجد مايلى:

(أ) احتمال نجاح أحدهما على الأقل فى الامتحان.

(ب) احتمال نجاح الطالب ب وعم نجاح الطالب أ.

(ج) احتمال نجاح أحدهما فى الامتحان دون الآخر.

(8) اذا كان احتمال اصابة هدف معين من أحد الجنود أ هو 65, واحتمال اصابة نفس الهدف من جندى آخر ب هو 8, وبافتراض استقلال الحدثين أ ، ب اوجد مايلى:

(أ) احتمال اصابة الهدف .

(ب) احتمال اصابة الهدف من أ فقط.

(9) فى أحد البحوث تمت دراسة لتقييم جودة الخدمة الصحية فى أحد المستشفيات وقد تم أخذ عينة من المترددين على المستشفى فى كل من قسم الاستقبال وقسم الطوارىء ويوضح الجدول التالى النتائج التى تم التوصل اليها:

جودة الخدمة / القسم	جيدة	غير جيدة	المجموع
الاستقبال	75	25	100
الطوارىء	35	15	50
المجموع	110	40	150

فإذا تم اختيار احد المترددين على المستشفى بطريقة عشوائية ، المطلوب ايجاد الاحتمالات الآتية:

(أ) احتمال ان يكون من قسم الاستقبال.

(ب) احتمال ان يكون من قسم الطوارىء.

(ج) احتمال ان تكون الخدمة جيدة.

(د) احتمال ان تكون الخدمة غيرجيدة.

(ذ) احتمال أن يكون من قسم الاستقبال ويرى أن الخدمة جيدة.

(ر) احتمال أن يكون من قسم الطوارىء ويرى أن الخدمة غيرجيدة.

(ز) احتمال ان يكون من قسم الاستقبال أو من قسم الطوارىء.

(س) احتمال أن يكون من قسم الطوارىء أويرى أن الخدمة غيرجيدة.

(ش) اذا تبين أنه من قسم الاستقبال فما هو احتمال أنه يرى أن الخدمة غير جيدة؟

(10) يحتوى صندوق على سبعة كرات بيضاء وخمسة كرات حمراء فاذا تم سحب كرتين من هذا الصندوق بالتتابع فما هو احتمال أن الكرتين من اللون الأحمر وذلك عندما يتم السحب بالتتابع مع الإعادة ؟ ثم احسب نفس الاحتمال عندما يتم السحب بالتتابع مع عدم الإعادة ؟

(11) صندوق به 6 كرات سوداء ، 4 كرات بيضاء فاذا تم سحب كرتين بالتتابع من هذا الصندوق اوجد ما يلى:

(أ) احتمال أن تكون الكرتين من اللون الأبيض.

(ب) احتمال أن تكون كرة واحدة بيضاء.

(ج) احتمال عدم وجود أى كرة بيضاء.

(12) صندوق به 5 كرات صفراء و7 كرات حمراء فاذا تم سحب ثلاث كرات بالتتابع من هذا الصندوق ارسم شجرة الاحتمالات ثم احسب احتمال أن تكون الثلاث كرات من نفس اللون وذلك فى الحالات الآتية:

أولا:- اذا تم إعادة كل كرة قبل سحب الكرة التالية.

ثانيا:- اذا لم يتم إعادة كل كرة قبل سحب الكرة التالية.

(13) مصنع به آلتين لإنتاج الأجهزة الكهربائية بحيث تنتج الآلة الأولى 40% من الإنتاج والثانية 60% من الإنتاج وقد أثبتت الدراسات السابقة أن نسبة الإنتاج المعيب من الآلة الأولى 1% ، نسبة المعيب من الآلة الثانية 2% وعند الفحص وجدت وحدة معيبة والمطلوب :

(1) ماهو احتمال أن تكون هذه الوحدة من انتاج الآلة الأولى؟

(2) ماهو احتمال أن تكون هذه الوحدة من انتاج الآلة الثانية؟

(14) تقوم احدى الشركات الصناعية بشراء احتياجاتها من المواد الخام اللازمة للانتاج من ثلاث شركات مختلفة حيث تقوم الشركة الأولى بتوريد 40% من المواد الخام وتقوم الشركة الثانية بتوريد 25% من المواد الخام وتقوم الشركة الثالثة بتوريد الباقى وقد اوضحت التعاملات مع هذه الشركات أن نسب المعيب فى الشحنة للشركات الثلاث هى 2% ، 3% ، 4% على الترتيب وعند الفحص **وجدت** شحنة معيبة اوجد مايلى:

(أ) ماحتمال أن هذه الشحنة من الشركة الأولى؟

(ب) ماحتمال أن هذه الشحنة من الشركة الثانية؟

(ج) ماحتمال أن هذه الشحنة من الشركة الثالثة؟

الباب الثانى

التوزيعات الاحتمالية

مقدمة:

يهتم علم الاحصاء بدراسة الظواهر الاقتصادية بهدف التنبؤ بما سيحدث لها فى المستقبل طالما أن نتائجها عشوائية وتخضع للصدفة ، فمثلا عدد الحوادث على طريق ما ظاهرة مهمة ونريد التنبؤ بما سيحدث لها فى المستقبل حتى نستطيع ان نقلل منها بقدر الامكان.

وعدد الحوادث على طريق ما يعتبر متغيرا يأخذ قيما عشوائية ويمكن استخدام نظرية الاحتمالات فى دراسة ذلك المتغير العشوائى عن طريق التوصل الى شكل المنحنى الذى يتحكم فى هذه الظاهرة ، ويسمى هذا المنحنى بالتوزيع الاحتمالى ويستخدم التوزيع الاحتمالى فى عمليات التنبؤ واتخاذ القرار.

المتغير العشوائى : Random Variable

المتغير العشوائى هو نتيجة تجربة عشوائية فاذا كانت س تمثل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية فإن س تأخذ قيما متغيرة لأن قيمتها تختلف من تجربة الى أخرى ، وتكون عشوائية لأنه لايمكن ان تعرف قيمة س قبل اجراء التجربة وبالتالى فإن المتغير العشوائى هو الذى تتحكم الصدفة فقط فى تحديد قيمته.

فعلى سبيل المثال عند القاء زهرتى نرد مرة واحدة ، هنا التجربة العشوائية هى القاء زهرتى النرد ونتيجة التجربة هى النقاط التى تظهر على السطح العلوى للزهرتين ، والمقدار الذى يرافق نتائج هذه التجربة يمكن ان يكون مجموع النقط التى تظهر على السطح العلوى للزهرتين وهذا المقدار يأخذ القيم ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... ، ١٢ وعلى ذلك فان مجموع النقط التى تظهر على السطح العلوى للزهرتين يعتبر متغيرا عشوائيا ، حيث أن المتغير العشوائى هو دالة تأخذ قيما معينة باحتمالات محددة داخل مدى معين.

كذلك عند اختيار طالب من طلاب كلية التجارة بصورة عشوائية ، فالتجربة العشوائية هنا هى اختيار الطالب ونتيجة التجربة أنه احد طلاب كلية التجارة ، المقدار الذى يرافق هذه التجربة يمكن أن يكون طول الطالب ، وزن الطالب ، دخل الطالب ، عدد أفراد اسرته .... الخ.

وينقسم المتغير العشوائى الى نوعين :

أ – المتغير العشوائى المنفصل.

ب- المتغير العشوائى المتصل.

أ – المتغير العشوائى المنفصل: Discrete Random Variable

هوذلك المتغير الذى يأخذ قيما منفصلة يمكن عدها وتكون قيم المتغير منفصلة عن بعضها البعض ، ومن الأمثلة على ذلك عدد افراد الأسرة ، عدد أعضاء هيئة التدريس فى كلية معينة ، عدد الأطباء فى مستشفى معين ، عدد الحوادث على طريق ما ......الخ.

ب- المتغير العشوائى المتصل: Continuous Random Variable

هو ذلك المتغير الذى يمكن أن يأخذ أى قيمة داخل مدى معين باحتمالات معينة مثل الأوزان ، الأطوال ، دخل الأسرة ، درجات الحرارة ....الخ.

التوزيعات الاحتمالية : Probability Distributions

التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى ما س مثلا عبارة عن دالة تعطى احتمالات قيم س المختلفة وهذه الدالة عبارة عن صيغة رياضية تبين قيم س المختلفة واحتمالاتها وتحقق عدة شروط.

أ- التوزيع الاحتمالى المنفصل : Discrete Probability Distribution

اذا كانت س متغيرا عشوائيا يأخذ القيم :

$س_١$ ، $س_٢$ ، ....، $س_ن$ باحتمالات

ح ($س_١$) ، ح ($س_٢$) ، ....ح ($س_ن$) بشرط أن :

(١) ح (س) ≥ صفر لجميع قيم س .

(٢) مجـ ح (س) = ١

فإنه يقال فى هذه الحالة أن س متغير عشوائى يتبع توزيعا احتماليا متقطعا ، دالته الاحتمالية هى ح (س).

مثال (1):

اذا تم القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) وكان المتغير العشوائى س يعبر عن عدد الصور التى يمكن الحصول عليها . المطلوب ايجاد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س .

الحل

عدد الحالات الكلية = $2 X 2 X 2 = 8$

ويمكن توضيح عدد الحالات الممكنة عند القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) من خلال الجدول التالى:

الحالات	الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة
1	ص	ص	ص
2	ص	ص	ك
3	ص	ك	ص
4	ص	ك	ك
5	ك	ص	ص
6	ك	ص	ك
7	ك	ك	ص
8	ك	ك	ك

المتغير العشوائي س الذى يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة يأخذ القيم التالية

{ 0 ، 1 ، 2 ، 3 } حيث:

0 ⟸ معناه عدم ظهور الصورة (حالة واحدة فقط)

1 ⟸ معناه ظهور الصورة مرة واحدة فقط (ثلاث حالات)

2 ⟸ معناها ظهور الصورة مرتين (ثلاث حالات)

3 ⟸ معناها ظهور الصورة ثلاث مرات (حالة واحدة فقط)

وعلى ذلك فان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو :

س	0	1	2	3
ح (س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

مثال (2):

اذا تم رمى زهرة نرد متكاملة التوازن مرتين أو (رمى زهرتى نرد متكاملتى التوازن مرة واحدة) وكان المتغير العشوائى س يعبر عن مجموع النواتج على الزهرتين والمطلوب ايجاد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س.

الحل

عدد الحالات الكلية = $6 \text{ X } 6 = 36$

ويمكن بيان فضاء العينة لهذه التجربة فى الجدول الآتى:

الثانية / الأولى	1	2	3	4	5	6
1	(1 ، 1)	(2 ، 1)	(3 ، 1)	(4 ، 1)	(5 ، 1)	(6 ، 1)
2	(1 ، 2)	(2 ، 2)	(3 ، 2)	(4 ، 2)	(5 ، 2)	(6 ، 2)
3	(1، 3)	(2، 3)	(3، 3)	(4، 3)	(5، 3)	(6، 3)
4	(1، 4)	(2، 4)	(3، 4)	(4، 4)	(5، 4)	(6، 4)
5	(1 ، 5)	(2 ، 5)	(3 ، 5)	(4 ، 5)	(5 ، 5)	(6 ، 5)
6	(1 ، 6)	(2 ، 6)	(3 ، 6)	(4 ، 6)	(5 ، 6)	(6 ، 6)

المتغير العشوائى س والذى يعبر عن مجموع النواتج على الزهرتين يأخذ القيم التالية

{ 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 }

وعلى ذلك فان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو :

س	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	المجموع
ع(س)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

ب – التوزيع الاحتمالى المتصل : Continuous Probability Distribution

اذا كانت س متغيرا عشوائيا متصلا وكانت هناك دالة د (س) تحقق الشروط التالية:

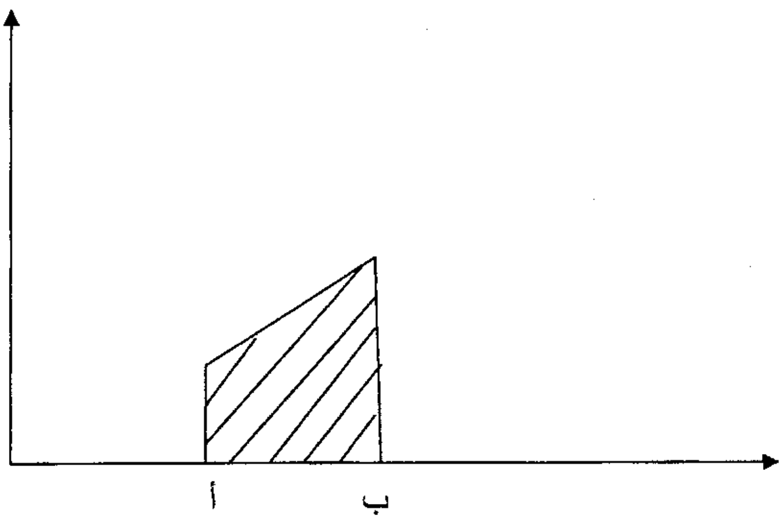
(1) د (س) $\geq$ صفر لجميع قيم س

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}$ د (س) . ء س = 1

فانه يقال فى هذه الحالة أن المتغير العشوائى س يتبع توزيعا احتماليا متصلا دالة كثافته الاحتمالية هى د (س) وفى هذه الحالة :

ح (أ < س < ب) = $\int_{أ}^{ب}$ د (س) . ء س

ويمكن التعبير عن الاحتمال السابق باستخدام الشكل التالى:



أى ان احتمال وقوع س فى مدى معين يساوى المساحة الواقعة بين أ ، ب تحت منحنى الدالة د (س).

ويجب توافر الشروط التالية فى الدالة السابقة :

(1) الشرط الأول يعنى أن هذه الدالة موجبة لجميع قيم المتغير العشوائى س .

(2) الشرط الثانى يعنى ان المساحة تحت منحنى هذه الدالة تساوى الواحد الصحيح.

مثال (3):

اثبت أن الدالة الآتية هى دالة كثافة احتمال :

د (س) = $\frac{1}{8}$ س حيث $0 \leq$ س ≤ 4

ثم اوجد ما يلى :

1- ح ($1 \leq$ س ≤ 3)

2- ح (س ≤ 2)

3 - ح (س ≤ 1)

الحل

لكى تكون الدالة السابقة دالة كثافة احتمال فلابد من توافر الشروط الآتية :

- الشرط الأول هو أن تكون الدالة موجبة لجميع قيم المتغير العشوائى س وهذا الشرط متحقق حيث أن الدالة موجبة فى المدى $0 \leq$ س ≤ 4
- الشرط الثانى هو أن المساحة تحت منحنى الدالة تساوى الواحد الصحيح وهذا ما سوف نقوم بأثباته:

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{8}\,\text{س}\,.\,\text{ءس} = \frac{1}{8}\int_{0}^{4} \text{س}\,.\,\text{ءس}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\text{س}^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left[\frac{4^2}{2}\right] - \left[\frac{0^2}{2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left[\frac{16}{2}\right] - \left[\frac{0}{2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(8 - 0\right)$$

$$= \frac{1}{8} \times 8 = 1$$

1- $\text{ح}\left(1 \le \text{س} \le 3\right) = \int_{1}^{3} \frac{1}{8}\,\text{س}\,.\,\text{ءس} = \frac{1}{8}\int_{1}^{3} \text{س}\,.\,\text{ءس}$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\text{س}^2}{2}\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left[\frac{3^2}{2}\right] - \left[\frac{1^2}{2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{8}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

2- $ح (س \geq 2) = \int_{2}^{4} \frac{1}{8} س \, . \, ءس = \frac{1}{8} \int_{2}^{4} س \, . \, ءس$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{س^2}{2} \right]_2^4$$

$$= \frac{1}{8} \left(\left[\frac{4^2}{2} \right] - \left[\frac{2^2}{2} \right] \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(8 - 2 \right)$$

$$= \frac{1}{8} \times 6$$

$$= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

3- $ح (س \leq 1) = \int_{0}^{1} \frac{1}{8} س \, . \, ءس = \frac{1}{8} \int_{0}^{1} س \, . \, ءس$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{س^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{8} \left(\left[\frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{0^2}{2} \right] \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

خواص التوزيعات الاحتمالية :

يمكن معرفة خصائص التوزيع الاحتمالى من خلال العزوم الخاصة به ، حيث يمكن باستخدامها الحصول على مقياس للنزعة المركزية ومقياس للتشتت المطلق والتشتت النسبى وكذلك مقياس للالتواء والتفرطح.

التوقع : Expectation

التوقع الرياضى للمتغير العشوائى هو القيمة المتوسطة للمتغير ويرمز لها بالرمز μ
ويتم حساب التوقع للمتغير العشوائى المتقطع كما يلى :

$$\mu = \text{مجـ}\,[\,\text{س} \; X \; \text{ح (س)}\,]$$

ويتم حساب التوقع للمتغير العشوائى المتصل كما يلى :

$$\mu = \int_{\text{س}} \text{س} \;\; \text{د (س)} \, . \, \text{ء س}$$

التباين : Variance

هو مقياس من مقاييس التشتت ويتم حساب التباين للمتغير العشوائى المتقطع كمايلى :

$$\sigma^2 = \text{مجـ}\,[\,\text{س}^2 \; X \; \text{ح (س)}\,] - \mu^2$$

ويتم حساب التباين للمتغير العشوائى المتصل كما يلى :

$$\sigma^2 = \int_{\text{س}} \text{س}^2 \, \text{د(س)} \, . \, \text{ء س} - \mu^2$$

الانحراف المعيارى :

الانحراف المعيارى σ هو الجذر التربيعى للتباين ويقيس مقدار تشتت قيم المتغير العشوائى.

معامل الاختلاف :

معامل الاختلاف هو مقياس للتشتت النسبى ويتم حسابه كما يلى :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\sigma}{\mu} \text{ X } 100$$

مثال (4):

اذا تم القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) وكان المتغير العشوائى س يعبر عن عدد الصور التى يمكن الحصول عليها . المطلوب ايجاد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س وكذلك ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى ومعامل الاختلاف.

الحل

عدد الحالات الكلية = 2 X 2 X 2 = 8

ويمكن توضيح عدد الحالات الممكنة عند القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) من خلال الجدول التالى:

الحالات	الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة
1	ص	ص	ص
2	ص	ص	ك
3	ص	ك	ص
4	ص	ك	ك
5	ك	ص	ص
6	ك	ص	ك
7	ك	ك	ص
8	ك	ك	ك

المتغير العشوائى س الذى يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة يأخذ القيم التالية

{ 0 ، 1 ، 2 ، 3 } حيث:

0 ⟸ معناه عدم ظهور الصورة (حالة واحدة فقط)

1 ⟸ معناه ظهور الصورة مرة واحدة فقط (ثلاث حالات)

2 ⟸ معناها ظهور الصورة مرتين (ثلاث حالات)

3 ⟸ معناها ظهور الصورة ثلاث مرات (حالة واحدة فقط)

وعلى ذلك فان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو :

س	0	1	2	3
ح (س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى ومعامل الاختلاف:

س	س^2	ح (س)	س X ح (س)	س^{2}X ح (س)
0	0	$\frac{1}{8}$	0	0
1	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	4	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{8}$
3	9	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$
المجموع		1	$\frac{12}{8}$	$\frac{24}{8}$

μ = مجـ [س X ح (س)]

$= \frac{12}{8} = 1.5$

σ^2 = مجـ [س^2 X ح (س)] – μ^2

$\therefore \sigma^2 = \frac{24}{8} - (1.5)^2$

$= 3 - 2.25 = 0.75$

$\sigma = \sqrt{0.75} = 0.87$

معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu} X 100$

معامل الاختلاف = $\frac{0.87}{1.5} X 100$

= 58%

مثال (5):

اذا تم رمى زهرة نرد متكاملة التوازن مرتين أو (رمى زهرتى نرد متكاملتى التوازن مرة واحدة) وكان المتغير العشوائى س يعبر عن مجموع النواتج على الزهرتين والمطلوب ايجاد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س وكذلك ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى ومعامل الاختلاف.

الحل

عدد الحالات الكلية = 6 X 6 = 36

ويمكن بيان فضاء العينة لهذه التجربة فى الجدول الآتى:

الثانية / الأولى	1	2	3	4	5	6
1	(1 ، 1)	(2 ، 1)	(3 ، 1)	(4 ، 1)	(5 ، 1)	(6 ، 1)
2	(1 ، 2)	(2 ، 2)	(3 ، 2)	(4 ، 2)	(5 ، 2)	(6 ، 2)
3	(1، 3)	(2، 3)	(3، 3)	(4، 3)	(5، 3)	(6، 3)
4	(1، 4)	(2، 4)	(3، 4)	(4، 4)	(5، 4)	(6، 4)
5	(1 ، 5)	(2 ، 5)	(3 ، 5)	(4 ، 5)	(5 ، 5)	(6 ، 5)
6	(1 ، 6)	(2 ، 6)	(3 ، 6)	(4 ، 6)	(5 ، 6)	(6 ، 6)

المتغير العشوائى س والذى يعبر عن مجموع النواتج على الزهرتين يأخذ القيم التالية

{ 12 ، 11 ، 10 ، 9 ، 8 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 }

وعلى ذلك فان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو :

س	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	المجموع
ع (س)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى ومعامل الاختلاف:

س	$س^2$	ح (س)	س X ح (س)	$س^2$ X ح (س)
2	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$
3	9	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{18}{36}$
4	16	$\frac{3}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{48}{36}$
5	25	$\frac{4}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{100}{36}$
6	36	$\frac{5}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{180}{36}$
7	49	$\frac{6}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{294}{36}$
8	64	$\frac{5}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{320}{36}$
9	81	$\frac{4}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{324}{36}$
10	100	$\frac{3}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{300}{36}$
11	121	$\frac{2}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{242}{36}$
12	144	$\frac{1}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{144}{36}$
المجموع		1	$\frac{252}{36}$	$\frac{1974}{36}$

μ = مجـ [س X ح (س)]

$= \frac{252}{36} = 7$

σ^2 = مجـ [س^2 X ح (س)] – μ^2

$\therefore \sigma^2 = \frac{1974}{36} - (7)^2$

$= 54.83 - 49 = 5.83$

$\sigma = \sqrt{5.83} = 2.415$

معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu}$ X 100

معامل الاختلاف = $\frac{2.415}{7}$ X 100

= 34.5 %

مثال (6):

اوجد التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى الآتى:

د (س) = { 3 س^2 صفر < س < 1
صفر فيما عدا ذلك

الحل

ايجاد التوقع :

$$\mu = \int_{\text{س}} \text{س} \ \text{د}(\text{س}) \ . \ \text{ءس}$$

$$\mu = \int_0^1 \text{س} \ X \ 3\text{س}^2 \ . \ \text{ءس}$$

$$= \int_0^1 3\text{س}^3 \ . \ \text{ءس}$$

$$= 3\int_0^1 \text{س}^3 \ . \ \text{ءس}$$

$$= 3\left[\frac{\text{س}^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 3\left(\left[\frac{1^4}{4}\right] - \left[\frac{0^4}{4}\right]\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{4} - 0\right)$$

$$= 3 \ X \ \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

ايجاد التباين والانحراف المعيارى :

$$\sigma^2 = \int_{\text{س}} \text{س}^2 \ \text{د}(\text{س}) \ . \ \text{ءس} - \mu^2$$

$$\sigma^2 = \int_0^1 \text{س}^2 \ X \ 3\text{س}^2 \ . \ \text{ءس} - \mu^2$$

$$= \int_0^1 3\text{س}^4 \ . \ \text{ءس} - \mu^2$$

$$= 3\int_0^1 \text{س}^4 \ . \ \text{ءس} - \mu^2$$

$$= 3\left[\frac{\text{س}^5}{5}\right]_0^1 - (0.75)^2$$

$$0.5625 - \left(\left[\frac{5_0}{5} \right] - \left[\frac{5_1}{5} \right] \right) 3 =$$

$$0.5625 - \left(0 - \frac{1}{5} \right) 3 =$$

$$0.5625 - \left(\frac{1}{5} X\, 3 \right) =$$

$$0.5625 - \frac{3}{5} =$$

$$0.0375 = 0.5625 - 0.6 =$$

الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$$= \sqrt{0.0375} = 0.194$$

التوزيعات الاحتمالية الهامة:

يعتبر الوصول الى شكل التوزيع الاحتمالى الذى يتحكم فى ظاهرة معينة سواء بالطريق التجريبى أو الرياضى من الأشياء الهامة ، حيث يساعد على وصف الظاهرة والتعرف على خصائصها والتنبؤ بما سيحدث لها فى المستقبل ، ولما كان من المستحيل دراسة كل التجارب العملية كل على حده والحصول على التوزيع الاحتمالى الخاص بكل تجربة ثم القيام بدراسة ذلك التوزيع ، حيث أنه يوجد عدد لا نهائى من التجارب .

لذلك قام علماء الاحصاء باستنباط مجموعة من التوزيعات الاحتمالية التى يمكن أن تؤول اليها نتائج أى تجربة عشوائية أو أى ظاهرة تحت شروط معينة.

وسوف نقوم فيما يلى بمناقشة بعض التوزيعات الاحتمالية الهامة للمتغير العشوائى المتقطع وكذلك المتصل وسنحاول التعرف على أهم خصائص هذه التوزيعات.

أولا: التوزيعات الاحتمالية الهامة للمتغير العشوائى المنفصل:

1- توزيع ذو الحدين.

2- التوزيع الهندسى الزائد.

3- توزيع بواسون.

1- توزيع ذو الحدين: Binomial Distribution

اذا أجرينا عددا من التجارب المتماثلة تماما والمستقلة بحيث كان لكل تجربة نتيجتان فقط : نجاح باحتمال قدره ح وفشل بحتمال قدره ل ، حيث ح مقدار ثابت لايتغير من تجربة الى أخرى ، فاذا كان س متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات النجاح فى عدد

ن تجربة من التجارب المستقلة ، فإنه يقال فى هذه الحالة أن س متغير عشوائى يتبع توزيع ذو الحدين بمعالم (ن ، ح).

وتجربة ذات الحدين هى كل تجربة احصائية تحقق الشروط الآتية:

أ- نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.

ب- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة أى محاولة أخرى.

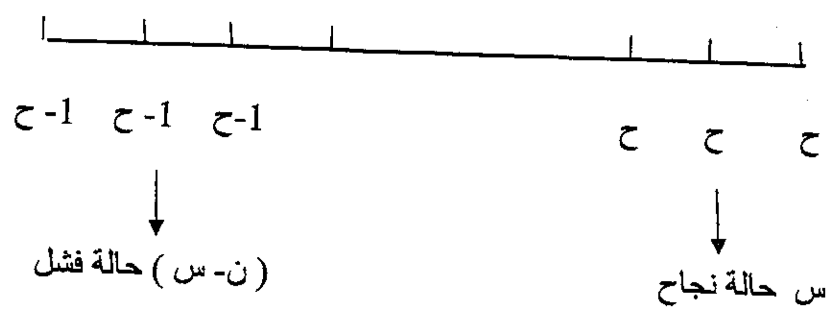
ج- احتمال النجاح فى كل محاولة ثابت وليكن ح ولذلك فإن احتمال الفشل

ل = 1 – ح.

د- تجرى التجربة عددا معينا من المرات أى يكون هناك عدد ن من المحاولات.

لايجاد توزيع ذو الحدين نوجد احتمال وجود س حالة نجاح من المحاولات التى عددها ن أى نوجد ح (س) من حالات النجاح كما فى الشكل التالى :

عدد المحاولات ن



من الواضح ان احتمال هذا الحدث هو $ح^{س} (ا- ح)^{ن-س}$ لأن احتمال النجاح ح والنجاحات مستقلة عن بعضها فاحتمالها يكون حاصل ضرب عدد حالات النجاح وبما أن عدد طرق اختيار س نجاحا من بين ن محاولة هو $^{ن}ق_{س}$ ينتج أن :

$$ح(س) = {}^{ن}ق_{س} \times ح^{س} \times (1-ح)^{ن-س}$$

حيث :

ن ← عدد المحاولات او حجم العينة.

ح ← احتمال النجاح فى كل محاولة.

(1 − ح) ← احتمال الفشل.

س ← عدد حالات النجاح المطلوبة.

ملاحظات هامة :

- يتم استخدام توزيع ذو الحدين اذا توافرت الشروط التالية:

ح < 5%   **أو**   ن ≥ 30

- يتم ايجاد المقدار $^{ن}ق_{س}$ على الالة الحاسبة كما يلى :

مثال : $^{5}ق_{3}$

يتم كتابة الرقم 5 على الآلة الحاسبة.

يتم الضغط على زرار $\boxed{n\ C\ r}$.

يتم كتابة الرقم 3 على الآلة الحاسبة.

يتم الضغط على زرار $\boxed{=}$ يظهر الناتج على الشاشة 10

- يتم استخدام توزيع ذو الحدين فى ايجاد الاحتمال اذا تم القاء قطعة عملة اكثر من 3 مرات أو رمى زهرة نرد أكثر من مرتين.

خصائص توزيع ذو الحدين :

أ – متوسط توزيع ذو الحدين (التوقع) μ = ن X ح

ب- التباين لتوزيع ذو الحدين σ^2 = ن X ح X (1- ح)

ج- الانحراف المعيارى لتوزيع ذو الحدين $\sigma = \sqrt{ن X ح X (1-ح)}$

مثال (7):

اذا تم القاء قطعة عملة 10 مرات اوجد ما يلى :

1- احتمال عدم الحصول على صورة.

2- احتمال الحصول على صورة مرة واحدة **على الأقل**.

الحل

ملاحظة هامة :

حيث أنه تم القاء قطعة النقود أكثر من 3 مرات .

∴ يتم استخدام توزيع ذو الحدين فى ايجاد الاحتمال.

احتمال الحصول على صورة

$$\text{ح} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\text{ن} = 10$$

احتمال عدم الحصول على صورة

$$(1 - \text{ح}) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$\text{س} = ؟$$

$$\text{ح}(\text{س}) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{س}} \times (1 - \text{ح})^{\text{ن} - \text{س}}$$

1- ايجاد احتمال عدم الحصول على صورة :

فى هذه الحالة نجد أن س = صفر

$$\therefore \text{ح}_{\text{س} = \text{صفر}} = {}^{10}\text{ق}_{\text{صفر}} \times (0.5)^{\text{صفر}} \times (0.5)^{10 - \text{صفر}}$$

$$= 1 \times 1 \times (0.5)^{10}$$

$$= 0.00098$$

2- احتمال الحصول على صورة مرة واحدة على الأقل

$$= \text{ح}_{\text{س} = 1} + \text{ح}_{\text{س} = 2} + \text{ح}_{\text{س} = 3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{ح}_{\text{س} = 10}$$

بما أن

الاحتمال المطلوب = 1 – الاحتمال غير المطلوب

∴ احتمال الحصول على صورة مرة واحدة على الأقل = 1 - ح $_{\text{س = صفر}}$

= 1 – 0.00098

= 0.99902

مثال (8):

اذا تم سحب عينة حجمها خمسة وحدات من انتاج معين ، احتمال المعيب فيه 2%

فما هو احتمال :

1- عدم الحصول على وحدة معيبة فى العينة.

2- الحصول على وحدة معيبة أوأكثر فى العينة.

3- الحصول على ثلاث وحدات معيبة بالضبط فى العينة.

الحل

ملاحظة هامة:

يلاحظ فى التمرين مايلى

حجم العينة (ن) = 5 < 30

احتمال المعيب (ح) = 2% < 5%

∴ يتم استخدام توزيع ذو الحدين فى ايجاد الاحتمال.

احتمال الحصول على وحدة معيبة

ح = 2% = 0.02

ن = 5

احتمال الحصول على وحدة سليمة

(1 – ح) = 1- 0.02 = 0.98

س = ؟

$$\text{ح}(\text{س}) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{س}} \times (\text{ا-ح})^{\text{ن-س}}$$

1- ايجاد احتمال عدم الحصول على وحدة معيبة :

فى هذه الحالة نجد أن س = صفر

$$\text{ح}_{\text{س = صفر}} = {}^{5}\text{ق}_{\text{صفر}} \times (0.02)^{\text{صفر}} \times (0.98)^{5-\text{صفر}}$$

$$= 1 \times 1 \times (0.98)^{5}$$

$$= 0.904$$

2-احتمال الحصول على وحدة معيبة أوأكثر فى العينة

$$= \text{ح}_{\text{س}=1} + \text{ح}_{\text{س}=2} + \text{ح}_{\text{س}=3} + \text{ح}_{\text{س}=4} + \text{ح}_{\text{س}=5}$$

بما أن

الاحتمال المطلوب = 1 – الاحتمال غير المطلوب

∴احتمال الحصول على وحدة معيبة أوأكثر فى العينة = 1 - $ح_{س = صفر}$

$= 1 - 0.904$

$= 0.096$

3-احتمال الحصول على ثلاث وحدات معيبة بالضبط فى العينة = $ح_{س = 3}$

$$\therefore ح_{س=3} = {}^{5}ق_{3} \times (0.02)^{3} \times (0.98)^{5-3}$$

$$= 10 \times 0.000008 \times (0.98)^{2}$$

$$= 10 \times 0.000008 \times 0.9604$$

$$= 0.00008$$

مثال (9):

اذا كان احتمال أن يولد طفل ذكر يساوى احتمال أن يولد طفل أنثى يساوى 0.5 وكانت س تمثل عدد الأطفال الذكور فى الأسرة ، اوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س لأسرة لديها 3 أطفال ثم اوجد التوقع والتباين والانحراف المعيارى.

الحل

ملاحظة هامة:

يلاحظ فى التمرين مايلى

- حجم العينة (ن) = 3 > 30
- احتمال ولادة طفل ذكر (ح) =0.5 > 5%

- يتم استخدام توزيع ذو الحدين فى ايجاد الاحتمال.

احتمال ولادة طفل ذكر

$ح = 0.5$

$ن = 3$

احتمال ولادة طفل أنثى

$(1 - ح) = 1- 0.5 = 0.5$

س = ؟

$$ح(س) = {}^{ن}ق_{س} \times ح^{س} \times (ا - ح)^{ن-س}$$

لايجاد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س والذى يمثل عدد الأطفال الذكور يتم التعويض عن س فى القانون السابق بالقيم التالية 0 ، 1 ، 2 ، 3 حيث :

0 ⟵ معناها أن الأسرة ليس لديها أطفال ذكور .

1 ⟵ معناها أن الأسرة لديها طفل واحد من الذكور .

2 ⟵ معناها أن الأسرة لديها طفلين من الذكور .

3 ⟵ معناها أن الأسرة لديها طفلين من الذكور .

$$ح_{س = صفر} = {}^{3}ق_{صفر} \times (0.5)^{صفر} \times (0.5)^{3-صفر}$$

$$= 1 \times 1 \times (0.5)^{3}$$

$$= 0.125$$

$$ح_{س=1} = {}^{3}ق_{1} \times (0.5)^{1} \times (0.5)^{3-1}$$

$$= 3 \times 0.5 \times (0.5)^{2}$$

$$= 0.375$$

$$ح_{س=2} = {}^{3}ق_{2} \times (0.5)^{2} \times (0.5)^{3-2}$$

$$= 3 \times 0.25 \times (0.5)$$

$$= 0.375$$

$$ح_{س=3} = {}^{3}ق_{3} \times (0.5)^{3} \times (0.5)^{3-3}$$

$$= 1 \times 0.125 \times (0.5)^{0}$$

$$= 1 \times 0.125 \times 1$$

$$= 0.125$$

∴ التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو :

س	0	1	2	3
ح (س)	0.125	0.375	0.375	0.125

متوسط توزيع ذو الحدين (التوقع) μ = ن X ح

$1.5 = 0.5 \times 3 =$

التباين لتوزيع ذو الحدين σ^2 = ن X ح X (1- ح)

$0.5 \times 0.5 \times 3 =$

$0.75 =$

ج- الانحراف المعيارى لتوزيع ذو الحدين σ = $\sqrt{ن \times ح \times (1 - ح)}$

$= \sqrt{0.75}$

$0.87 =$

مثال (10):

يستخدم 80% من طلاب جامعة القاهرة مترو الأنفاق فى الذهاب للجامعة فاذا تم اختيار عينة عشوائية مكونة من 10 طلاب من طلاب الجامعة فالمطلوب ايجاد الاحتمالات الآتية:

1- احتمال أن طالب واحد على الأقل يستخدم مترو الأنفاق.

2- احتمال أن طالب واحد على الأكثر يستخدم مترو الأنفاق.

3- احتمال أن خمسة طلاب بالضبط يستخدمون مترو الأنفاق.

4- ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع المستخدم.

الحل

ملاحظة هامة: نلاحظ فى التمرين مايلى:

احتمال ذهاب الطالب بمترو الأنفاق = 80% > 5%

حجم العينة (ن) = 10 < 30

. يتم استخدام توزيع ذو الحدين فى ايجاد الاحتمال.

احتمال ذهاب الطالب بمترو الأنفاق

ح = 80% = 0.80

ن = 10

احتمال ذهاب الطالب بأى وسيلة مواصلات أخرى

(1 – ح) = 1- 0.80 = 0.20

س = ؟

$$\text{ح}(\text{س}) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{س}} \times (1-\text{ح})^{\text{ن}-\text{س}}$$

1- احتمال أن طالب واحد على الأقل يستخدم مترو الأنفاق

$= \text{ح}_{\text{س}=1} + \text{ح}_{\text{س}=2} + \text{ح}_{\text{س}=3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{ح}_{\text{س}=10}$

بما أن

الاحتمال المطلوب = 1 – الاحتمال غير المطلوب

∴ احتمال أن طالب واحد على الأقل يستخدم مترو الأنفاق = 1 - $\text{ح}_{\text{س}=\text{صفر}}$

∴ $\text{ح}_{\text{س}=\text{صفر}} = {}^{10}\text{ق}_{\text{صفر}} \times (0.80)^{\text{صفر}} \times (0.20)^{10-\text{صفر}}$

$= 1 \times 1 \times (0.20)^{10}$

$= 0.0000001024$

∴ احتمال أن طالب واحد على الأقل يستخدم مترو الأنفاق = 1 - 0.0000001024

$= 0.999999897$

2- احتمال أن طالب واحد على الأكثر يستخدم مترو الأنفاق

$= \text{ح}_{\text{س}=\text{صفر}} + \text{ح}_{\text{س}=1}$

$\text{ح}_{\text{س}=1} = {}^{10}\text{ق}_{1} \times (0.80)^{1} \times (0.20)^{10-1}$

$= 10 \times 0.80 \times (0.20)^{9}$

$= 0.000004096$

∴ احتمال أن طالب واحد على الأكثر يستخدم مترو الأنفاق

$= 0.0000001024 + 0.000004096 = 0.0000041984$

3- احتمال أن خمسة طلاب بالضبط يستخدمون مترو الأنفاق= $\text{ح}_{\text{س}=5}$

∴ $\text{ح}_{\text{س}=5} = {}^{10}\text{ق}_{5} \times (0.80)^{5} \times (0.20)^{10-5}$

$$= 252 \ X \ 0.32768 \ X \ (0.20)^5$$

$$= 252 \ X \ 0.32768 \ X \ 0.00032$$

$$= 0.0264$$

4- ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع المستخدم:

متوسط توزيع ذو الحدين (التوقع) μ = ن X ح

$$= 10 \ X \ 0.8 = 8$$

التباين لتوزيع ذو الحدين σ^2 = ن X ح X (1- ح)

$$= 10 \ X \ 0.80 \ X \ 0.20$$

$$= 1.6$$

الانحراف المعيارى لتوزيع ذو الحدين σ = $\sqrt{ن \, X \, ح \, X \, (1 - ح)}$

$$= \sqrt{1.6}$$

$$= 1.265$$

مثال (11):

اذاكانت نسبة العاملين من الرجال فى احد المصانع 55 % فاذا تم اخذ عينة عشوائية مكونة من خمسة من العاملين بالمصنع فاوجد الاحتمالات الآتية :

1- أن يكون بالعينة سيدة واحدة.

2- أن لايوجد بالعينة أى سيدة.

3- وجود سيدة على الأقل بالعينة.

الحل

ملاحظة هامة: نلاحظ فى التمرين مايلى:

احتمال أن يكون رجل = 55% > 5%

حجم العينة (ن) = 5 < 30

احتمال النجاح (ح) ← احتمال أن يكون سيدة

احتمال الفشل (1- ح) ← احتمال أن يكون رجل

- يتم استخدام توزيع ذو الحدين فى ايجاد الاحتمال.

احتمال أن يكون سيدة

ح = 1 - 55% = 0.45

ن = 5

احتمال أن يكون سيدة

(1 – ح) = 0.55

س = ؟

$$ح(س) = {}^{ن}ق_{س} \; X \; ح^{س} \; X \; (ا - ح)^{ن-س}$$

1- احتمال أن يكون بالعينة سيدة واحدة = $ح_{س=1}$

$$\therefore ح_{س=1} = {}^{5}ق_{1} \; X \; (0.45)^{1} \; X \; (0.55)^{5-1}$$

$$= 5 \; X \; 0.45 \; X \; (0.55)^{4}$$

$$= 5 \; X \; 0.45 \; X \; 0.09150625$$

$$= 0.206$$

2- احتمال أن لايوجد بالعينة أى سيدة = $ح_{س=صفر}$

$$ح_{س=صفر} = {}^{5}ق_{صفر} \; X \; (0.45)^{صفر} \; X \; (0.55)^{5-صفر}$$

$$= 1 \; X \; 1 \; X \; (0.55)^{5}$$

$$= 0.05033$$

3- احتمال وجود سيدة على الأقل بالعينة

$$= ح_{س=1} + ح_{س=2} + ح_{س=3} + ح_{س=4} + ح_{س=5}$$

بما أن

الاحتمال المطلوب = 1 – الاحتمال غير المطلوب

$\therefore$ احتمال وجود سيدة على الأقل بالعينة = 1 - $ح_{س=صفر}$

$$= 1 - 0.05033$$

$$= 0.94967$$

2- التوزيع الهندسى الزائد: Hypergeometric Distribution

نفرض أن لدينا مجتمعا محدودا حجمه ن وهذا المجتمع مقسم الى قسمين الأول حجمه $ن_1$ والثانى حجمه (ن – $ن_1$) بحيث ان القسم الأول يتمتع بخاصية معينة والقسم الثانى لايتمتع بهذه الخاصية ، ونفرض أننا سحبنا عينة عشوائية حجمها م بدون إعادة فإن احتمال الحصول على س حالة نجاح من القسم الأول ، (م - س) حالة فشل من القسم الثانى يكون كالآتى:

$$ح(س) = \frac{ق^{ن_1}_{س} \times ق^{(ن - ن_1)}_{م - س}}{ق^{ن}_{س}}$$

خصائص التوزيع الهندسى الزائد:

أ – متوسط التوزيع الهندسى الزائد (التوقع) $\mu = م \left(\frac{ن_1}{ن}\right)$

ب- التباين للتوزيع الهندسى الزائد $\sigma^2 = م \left(\frac{ن_1}{ن}\right) \left(\frac{ن - ن_1}{ن}\right) \left(\frac{ن - م}{ن - 1}\right)$

ج- الانحراف المعيارى للتوزيع الهندسى الزائد $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

مثال (12):

يعمل بقسم المشتريات باحدى الشركات 25 موظف منهم 15 رجل وقد اراد مدير الشركة اختيار لجنة مكونة من خمسة من الموظفين بقسم المشتريات وذلك للقيام بفحص الطلبية الأخيرة التى وردت للشركة والمطلوب ايجاد الاحتمالات التالية :

1- احتمال أن اللجنة تكون مكونة من 3 رجال وسيدتين.

2- احتمال أن اللجنة تكون مكونة من رجل و4 سيدات.

3- ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع المستخدم.

الحل

ن = 25 (عدد الرجال) $ن_1 = 15$

عدد السيدات = ن – $ن_1$ = 25 – 15 = 10

م = 5

$$ح\,(س) = \frac{{}^{ن_1}ق_{س} \quad X \quad {}^{(ن - ن_1)}ق_{م - س}}{{}^{ن}ق_{س}}$$

1- احتمال أن اللجنة تكون مكونة من 3 رجال وسيدتين = $ح_{س = 3}$

$$\text{ح}_{\text{س}=3} = \frac{{}^{15}\text{ق}_{3} \; X \; {}^{10}\text{ق}_{5-3}}{{}^{25}\text{ق}_{5}}$$

$$\text{ح}_{\text{س}=3} = \frac{{}^{15}\text{ق}_{3} \; X \; {}^{10}\text{ق}_{2}}{{}^{25}\text{ق}_{5}}$$

$$= \frac{455 \; X \; 45}{53130} = \frac{20475}{53130} = 0.39$$

2- احتمال أن اللجنة تكون مكونة من رجل و4 سيدات = $\text{ح}_{\text{س}=1}$

$$\text{ح}_{\text{س}=1} = \frac{{}^{15}\text{ق}_{1} \; X \; {}^{10}\text{ق}_{5-1}}{{}^{25}\text{ق}_{5}}$$

$$= \frac{{}^{15}\text{ق}_{1} \; X \; {}^{10}\text{ق}_{4}}{{}^{25}\text{ق}_{5}}$$

$$= \frac{15 \; X \; 210}{53130} = \frac{3150}{53130} = 0.06$$

3- ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع المستخدم:

متوسط التوزيع الهندسى الزائد (التوقع) μ = م ($\frac{\text{ن}_1}{\text{ن}}$)

$$= 5 \left(\frac{15}{25} \right) = \frac{75}{25} = 3$$

التباين للتوزيع الهندسى الزائد $\sigma^2 = م \left(\frac{ن_1}{ن} \right) \left(\frac{ن - ن_1}{ن} \right) \left(\frac{ن - م}{ن - 1} \right)$

$$\therefore \sigma^2 = 5 \left(\frac{15}{25} \right) \left(\frac{25 - 15}{25} \right) \left(\frac{25 - 5}{25 - 1} \right)$$

$$= 1$$

الانحراف المعيارى للتوزيع الهندسى الزائد $\sigma = \sqrt{1} = 1$

مثال (13):

شحنة مكونة من 50 وحدة وتحتوى هذه الشحنة على 10 وحدات معيبة فاذا تم سحب عينة عشوائية مكونة من 5 وحدات من هذه الشحنة اوجد الاحتمالات الآتية :

1- احتمال الحصول على 5 وحدات معيبة .

2- احتمال الحصول على وحدة معيبة على الأقل.

3-احتمال الحصول 3 وحدات معيبة.

الحل

$ن = 50$ (عدد الوحدات المعيبة) $ن_1 = 10$

عددالوحدات السليمة= $ن - ن_1 = 50 - 10 = 40$

$م = 5$

$$\text{ح}(\text{س}) = \frac{\text{ق}^{\text{ن}_1}_{\text{س}} \; X \; \text{ق}^{(\text{ن}-\text{ن}_1)}_{\text{م}-\text{س}}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{س}}}$$

1- احتمال الحصول على 5 وحدات معيبة = $\text{ح}_{\text{س}=5}$

$$\therefore \text{ح}_{\text{س}=5} = \frac{\text{ق}^{10}_{5} \; X \; \text{ق}^{40}_{5-5}}{\text{ق}^{50}_{5}}$$

$$\therefore \text{ح}_{\text{س}=5} = \frac{\text{ق}^{10}_{5} \; X \; \text{ق}^{40}_{\text{صفر}}}{\text{ق}^{50}_{5}}$$

$$= \frac{252 \; X \; 1}{2118760} = \frac{252}{2118760} = .0001$$

2- احتمال الحصول على وحدة معيبة على الأقل

= $\text{ح}_{\text{س}=1} + \text{ح}_{\text{س}=2} + \text{ح}_{\text{س}=3} + \text{ح}_{\text{س}=4} + \text{ح}_{\text{س}=5}$

بما أن

الاحتمال المطلوب = 1 – الاحتمال غير المطلوب

∴ احتمال الحصول على وحدة معيبة على الأقل = 1 - $\text{ح}_{\text{س}=\text{صفر}}$

$$= \frac{{}^{10}\text{ق}_{\text{صفر}} \;X\; {}^{40}\text{ق}_{5}}{{}^{50}\text{ق}_{5}}$$

$$= \frac{658008 \;X\; 1}{2118760}$$

$$= \frac{658008}{2118760} = 0.311$$

احتمال الحصول على وحدة معيبة على الأقل = $1 - 0.311 = 0.689$

3-احتمال الحصول 3 وحدات معيبة = $\text{ح}_{\text{س} = 3}$

$$\text{ح}_{\text{س} = 3} = \frac{{}^{10}\text{ق}_{3} \;X\; {}^{40}\text{ق}_{5-3}}{{}^{50}\text{ق}_{5}}$$

$$\therefore \text{ح}_{\text{س} = 3} = \frac{{}^{10}\text{ق}_{3} \;X\; {}^{40}\text{ق}_{2}}{{}^{50}\text{ق}_{5}}$$

$$= \frac{780 \;X\; 120}{2118760} = \frac{93600}{2118760} = 0.044$$

3- توزيع بواسون : Poisson Distribution

فى الحياة العامة نقابل بعض الظواهر التى ينطبق عليها شروط توزيع ذو الحدين ولكن هذه الحوادث تكون نادرة الحدوث ، وهذا يعنى أن احتمال حدوثها صغير جدا ولهذا نحتاج الى عدد كبير جدا من المحاولات ن حتى ندرس المتغير ونتعرف على توزيعه.

ومن أمثلة هذه الأحداث وقوع حريق فى مدينة كبيرة أو وقوع زلزال فى دولة معينة أو خطأ مطبعى فى كتاب أو وقوع حادث سيارة على طريق أو خروج قطار من القضبان.

اذا كان س متغير عشوائى يمثل عدد حالات النجاح لحادثة نادرة الحدوث واحتمال حدوثها ح ، ح تقترب من الصفر واحتمال عدم وقوعها ل يقترب من الواحد الصحيح ، واذا كانت ن تمثل عدد المحاولات وهو كبير جدا بحيث أن ن ح = λ

حيث λ مقدار ثابت فان الدالة الاحتمالية للمتغير س هى :

$$\boxed{\text{ح}\,(\text{س}) = \frac{\text{هـ}^{-\lambda}\ X\ \lambda^{\text{س}}}{\text{س}!}}$$

حيث :

هـ ⟵ مقدار ثابت وهو الأساس الطبيعى للوغاريتمات = 2.718

λ ⟵ متوسط قيم الظاهرة.

س ⟵ عدد حالات النجاح المطلوبة.

س ⟵ عدد حالات النجاح المطلوبة.

ملاحظات هامة :

- يتم استخدام توزيع بواسون اذا توافرت الشروط التالية:

ح < 5%   و   ن > 30

- س! ⟵ معناها مضروب س
- 5! ⟵ معناها مضروب 5 = 5 X 4 X3 X 2 X 1 = 120

ويمكن ايجاد مضروب 5 باستخدام الالة الحاسبة كمايلى:

يتم كتابة الرقم 5 على الآلة الحاسبة

يتم الضغط على زرار $\boxed{\text{shift}}$

يتم الضغط على زرار X!

يتم الضغط على علامة =

يظهر الناتج على الآلة الحاسبة = 120

- صفر! = 1
- 1! = 1

خصائص توزيع بواسون :

أ – متوسط توزيع بواسون (التوقع) μ = ن = ح X ن = λ

ب- التباين لتوزيع بواسون σ^2 = ن X ح = λ

ج- الانحراف المعيارى لتوزيع بواسون $\sigma = \sqrt{\lambda}$

مثال (14):

اذا كان احتمال وجود وحدة معيبة فى انتاج احدى الآلات هو 1% فاذا تم أخذ عينة عشوائية من 100 وحدة من انتاج هذه الآلة المطلوب باستخدام التوزيع البواسونى ايجاد الاحتمالات الآتية :

1- احتمال عدم وجود اى وحدة معيبة فى العينة.

2- احتمال وجود وحدة معيبة على الأقل.

3- احتمال وجود وحدة معيبة على الأكثر.

4- احتمال وجود ثلاث وحدات معيبة بالضبط فى العينة.

الحل

ن = 100   ح = 1% = 0.01

λ = ن X ح = 100 X 0.01 = 1

$$ح(س) = \frac{هـ^{-\lambda} \times \lambda^{س}}{س!}$$

1- ايجاد احتمال عدم وجود اى وحدة معيبة فى العينة:

فى هذه الحالة نجد أن س = صفر

$$∴ ح_{س = صفر} = \frac{2.718^{-1} \times 1^{صفر}}{صفر!}$$

$$= \frac{0.368 \times 1}{1} = 0.368$$

2-احتمال الحصول على وحدة معيبة على الأقل

$$= ح_{س = 1} + ح_{س = 2} + ح_{س = 3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + ح_{س = 100}$$

بما أن

الاحتمال المطلوب = 1 – الاحتمال غير المطلوب

∴احتمال الحصول على وحدة معيبة على الأقل = 1 - $ح_{س = صفر}$

$= 1 - 0.368$

$= 0.632$

3- احتمال وجود وحدة معيبة على الأكثر = $ح_{س = صفر} + ح_{س = 1}$

$$ح_{س = 1} = \frac{2.718^{-1} \; X \; 1^{1}}{1!}$$

$$= \frac{0.368 \; X \; 1}{1} = 0.368$$

- احتمال وجود وحدة معيبة على الأكثر = $ح_{س = صفر}$ + $ح_{س = 1}$

$= 0.368 + 0.368 = 0.736$

4-احتمال الحصول على ثلاث وحدات معيبة بالضبط فى العينة = $ح_{س = 3}$

$$ح_{س = 3} = \frac{2.718^{-1} \; X \; 1^{3}}{3!}$$

$$= \frac{0.368 \; X \; 1}{6} = 0.0613$$

مثال (15):

فى أحد مراكز بيع التليفون المحمول يرد العملاء للشراء **بمعدل** 120 عميل وذلك فى اليوم الذى يبدأ من الساعة العاشرة صباحا وحتى الساعة العاشرة مساء احسب مايلى:

1- احتمال وصول5 عملاء كل ساعة .

2- احتمال وصول عميل واحد على الأقل كل ساعة.

3- احتمال وصول عميل واحد على الأقل كل نصف ساعة.

الحل

عدد ساعات العمل = عدد الساعات من 10 صباحا الى 10 مساء

= 12 ساعة

بما أن معدل وصول العملاء للشراء = 120

$\therefore$ $\lambda = \frac{120}{12} = 10$ عملاء كل ساعة

ح (س) = $\frac{هـ^{-\lambda} \; X \; \lambda^{س}}{س!}$

1- احتمال وصول5 عملاء كل ساعة = ح $_{س = 5}$

$\therefore$ ح $_{س = 5}$ = $\frac{2.718^{-10} \; X \; 10^{5}}{5!}$

= $\frac{0.000045 \; X \; 100000}{120}$

= 0.038

2- احتمال وصول عميل واحد على الأقل كل ساعة

= ح $_{س = 1}$ + ح $_{س = 2}$ + ح $_{س = 3}$ + ... + ح $_{س = 10}$

بما أن

الاحتمال المطلوب = 1 – الاحتمال غير المطلوب

. احتمال وصول عميل واحد على الأقل كل ساعة = 1 - ح $_{\text{س = صفر}}$

$$\text{ح}_{\text{س = صفر}} = \frac{2.718^{-10} \; X \; 10^{\text{صفر}}}{\text{صفر!}}$$

$$= \frac{0.000045 \; X \; 1}{1}$$

$$= 0.000045$$

. احتمال وصول عميل واحد على الأقل كل ساعة = 1 - 0.000045

= 0.999955

4- ايجاداحتمال وصول عميل واحد على الأقل كل نصف ساعة:

λ الجديدة = $\frac{10}{2}$ = 5 عملاء كل نصف ساعة

. ايجاداحتمال وصول عميل واحد على الأقل كل نصف ساعة

= ح $_{\text{س = 1}}$ + ح $_{\text{س = 2}}$ + ح $_{\text{س = 3}}$ + ح $_{\text{س = 4}}$ + ح $_{\text{س = 5}}$

بما أن

الاحتمال المطلوب = 1 – الاحتمال غير المطلوب

. احتمال وصول عميل واحد على الأقل كل نصف ساعة = 1 - ح $_{\text{س = صفر}}$

$$\text{ح}_{\text{س = صفر}} = \frac{2.718^{-5} \; X \; 5^{\text{صفر}}}{\text{صفر!}}$$

$$= \frac{1 \ X \ 0.0067}{1}$$

$$= 0.0067$$

∴ احتمال وصول عميل واحد على الأقل كل نصف ساعة = 1 – 0.0067

= 0.9933

مثال (16):

اذا كان متوسط عدد الحوادث الشهرية على احد الطرق هو 2 ، فاذا تم اختيار احد الشهور عشوائيا اوجد مايلى :

1 – احتمال وقوع حادثتين على الأقل.

2 – اوجد التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع المستخدم.

الحل

بما أن متوسط عدد الحوادث الشهرية = 2

∴ λ = 2

$$ح(س) = \frac{هـ^{-\lambda} \ X \ \lambda^{س}}{س!}$$

1- احتمال وقوع حادثتين على الأقل = ح (س ≥ 2)

= 1 – ح (س < 2)

∴ احتمال وقوع حادثتين على الأقل = 1 – (ح س = صفر + ح س = 1)

$$\therefore \text{ح}_{\text{س = صفر}} = \frac{2.718^{-2} \; X \; 2^{\text{صفر}}}{\text{صفر!}}$$

$$= \frac{0.1354 \; X \; 1}{1}$$

$$= 0.1354$$

$$\text{ح}_{\text{س = 1}} = \frac{2.718^{-2} \; X \; 2^{1}}{1!}$$

$$= \frac{0.1354 \; X \; 2}{1}$$

$$= 0.2708$$

∴ احتمال وقوع حادثتين على الأقل = 1 – (0.1354 + 0.2708)

= 1 – 0.4062

= 0.5938

2 – ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع المستخدم:

متوسط توزيع بواسون (التوقع) $\mu = \lambda = 2$

التباين لتوزيع بواسون $\sigma^2 = \lambda = 2$

الانحراف المعيارى لتوزيع بواسون $\sigma = \sqrt{\lambda}$

$$= \sqrt{2} = 1.414$$

معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu} \times 100$

$$= \frac{1.414}{2} \times 100 = 70.7\%$$

مثال (17):

اذا كانت السيارات تأتى لمركز خدمة الصيانة بتوزيع احتمال بواسونى بمتوسط قدره 12 سيارة كل ساعة اوجد مايلى :

1 – احتمال وصول 5 سيارات كل ساعة.

2 – احتمال وصول 3 سيارات كل نصف ساعة.

3 – احتمال وصول سيارة واحدة على الأقل كل ربع ساعة.

الحل

λ = 12 سيارة كل ساعة

$$ح(س) = \frac{هـ^{-\lambda} \times \lambda^{س}}{س!}$$

1- احتمال وصول 5 سيارات كل ساعة = ح $_{س = 5}$

∴ ح $_{س = 5}$ $= \frac{5_{12}\ \ X\ 12\ -_{2.718}}{!5}$

$= \frac{248832\ \ X\ 0.0000062}{120}$

$= 0.013$

2 – ايجاد احتمال وصول 3 سيارات كل نصف ساعة:

λ الجديدة $= \frac{12}{2} = 6$

∴ احتمال وصول 3 سيارات كل نصف ساعة = ح $_{س = 3}$

ح $_{س = 3}$ $= \frac{3_{6}\ \ X\ 6\ -_{2.718}}{!3}$

$= \frac{216X\ 0.0025}{6}$

$= 0.09$

3 – ايجاداحتمال وصول سيارة واحدة على الأقل كل ربع ساعة:

λ الجديدة $= \frac{12}{4} = 3$

∴ احتمال وصول سيارة واحدة على الأقل كل ربع ساعة = ح (س ≥ 1)

= 1 − ح $_{\text{س = صفر}}$

ح $_{\text{س = صفر}}$ = $\dfrac{2.718^{-3} \; X \; 3^{\text{صفر}}}{\text{صفر!}}$

= $\dfrac{0.0498 \; X \; 1}{1}$

= 0.0498

∴ احتمال وصول سيارة واحدة على الأقل كل ربع ساعة = 1- 0.0498

= 0.9502

ثانيا: التوزيعات الاحتمالية الهامة للمتغير العشوائى المتصل :

1- التوزيع الطبيعى.

2 – توزيع ت.

وسوف تقتصر دراستنا فى هذا الباب على التوزيع الطبيعى نظرا لأهمية هذا التوزيع فى علم الاحصاء.

التوزيع الطبيعى : Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعى من أهم التوزيعات الاحتمالية فى علم الاحصاء ، لأنه يمثل كثيرا من الظواهر التى تقابلنا فى الحياة العملية بالإضافة الى أن كثيرا من الظواهر يمكن أن تؤول الى التوزيع الطبيعى تحت شروط معينة من الممكن تحقيقها مما يسهل تطبيق نتائج وخصائص هذا التوزيع على هذه الظواهر.

اذا كان هناك ظاهرة ما نرمز لقيمها بالرمز س تتبع توزيعا طبيعيا فإن دالة كثافته الاحتمالية هى :

$$\text{د(س)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\text{ط}}} \times \text{هـ}^{\frac{-(\text{س} - \mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < \text{س} < \infty$$

حيث :

ط ⟵ مقدار ثابت = 3.141

هـ ⟵ مقدار ثابت = 2.718

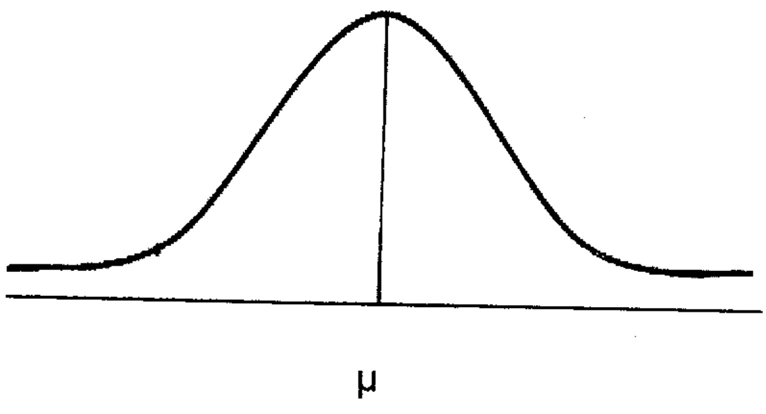
μ ⟵ متوسط التوزيع الطبيعى.

σ^2 ⟵ تباين التوزيع الطبيعى.

إن معادلة التوزيع الطبيعى تحدد منحنى هذا التوزيع وهى تتعين تماما بمعرفة قيمة كل من المتوسط μ والتباين σ^2.

وتستعمل هذه المعادلة فى رسم منحنى التوزيع الطبيعى الذى يشبه شكل الجرس وهو متماثل حول العمود المقام على النقطة س = μ ويتقارب من الصفر على الجهتين عندما س ⟵ - ∞ وعندما س ⟵ ∞ ، أما المتوسط μ فتعين مركز التوزيع ، σ انحرافه المعيارى فاذا تحركت μ الى اليمين أو اليسار ينتقل مركز التوزيع ولايتغير شكل المنحنى ، أما اذا تغيرت σ وبقيت μ كما هى فان تشتت وتباعد المنحنى حول المركز يقل كلما صغرت σ وأما اذا تغيرت μ ، σ فان مركز التوزيع يتغير ومنحناه حول المركز يتغير كذلك.

ويأخذ التوزيع الطبيعى الشكل التالى:



خواص التوزيع الطبيعى :

1- المساحة تحت منحنى دالة التوزيع الطبيعى تساوى الواحد الصحيح مهما تغيرت قيم μ ، σ بحيث تكون مساحة الجزء الموجود على يمين الخط المقام عند μ تساوى مساحة الجزء الموجود على يسار هذا الخط وكل منهما يساوى 0.5.

2 – المنحنى الطبيعى متماثل حول الوسط والوسيط والمنوال وتمتد أطراف المنحنى لتلتقى مع المحور الأفقى عند ∞ فى الطرف الأيمن ، - ∞ فى الطرف الأيسر.

3 – بما ان هذا المنحنى متماثل ومعتدل التفرطح فان معامل الإلتواء يساوى الصفر ، معامل التفرطح يساوى 3 .

التوزيع الطبيعى المعيارى (القياسى) : Standard Normal Distribution

اذا كان س متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى σ فاننا نقوم بتحويل هذا المتغير الى متغير آخر Z يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى بمتوسط يساوى صفر وتباين يساوى 1.

ويأخذ المتغير Z الشكل التالى :

$$\boxed{Z = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}}$$

حيث :

Z ⟵ الدرجة المعيارية.

س ⟵ القيمة المشاهدة.

μ ⟵ الوسط الحسابى للتوزيع الطبيعى.

σ ⟵ الانحراف المعيارى للتوزيع الطبيعى.

مثال (18):

اذا كان متوسط نصيب الفرد من الدخل القومى يتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 10000 جنيه ، وانحراف معيارى قدره 5000 جنيه والمطلوب ايجاد الاحتمالات الآتية:

1- احتمال وجود شخص دخله بين 10000 ، 20000 جنيه

2- احتمال وجود شخص دخله أكثر من 20000 جنيه.

3 – احتمال وجود شخص دخله بين 20000 ، 25000 جنيه.

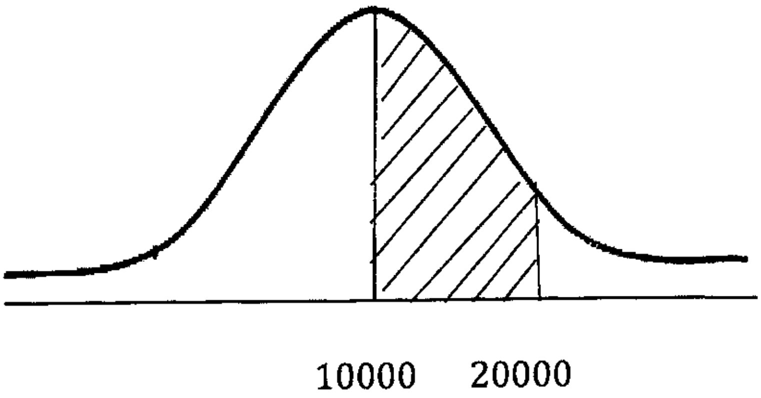
4 – احتمال وجود شخص د خله أقل من 5000 جنيه.

5 - احتمال وجود شخص د خله أقل من 15000 جنيه.

الحل

$\mu = 10000$ $\sigma = 5000$

1- احتمال وجود شخص دخله بين 10000 ، 20000 جنيه:



$$Z = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

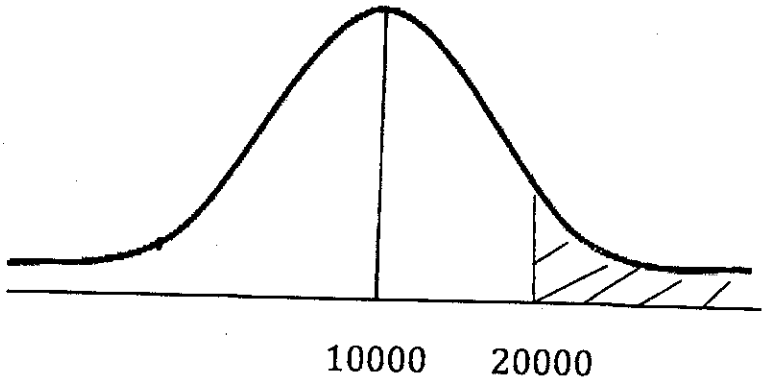
$$Z = \frac{20000 - 10000}{5000}$$

$$= \frac{10000}{5000} = 2$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 2 هو 0.4772.

∴ احتمال وجود شخص دخله بين 10000 ، 20000 جنيه = 0.4772

2- احتمال وجود شخص دخله أكثر من 20000 جنيه:



$$Z = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{20000 - 10000}{5000}$$

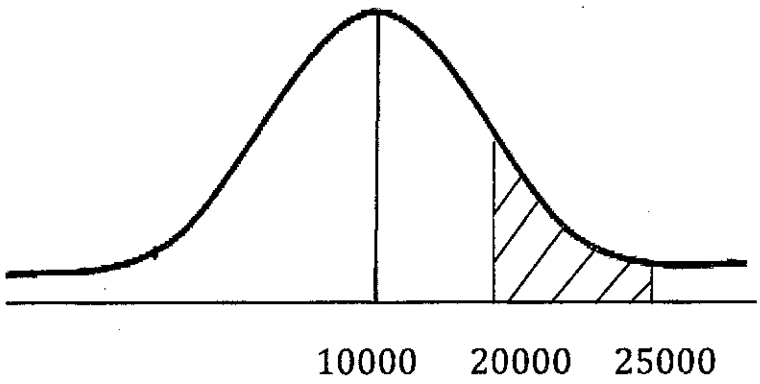
$$= \frac{10000}{5000} = 2$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 2 هو 0.4772.

∴ احتمال وجود شخص دخله أكثر من 20000 جنيه = 0.5 – 0.4772

= 0.0228

3 – ايجاد احتمال وجود شخص دخله بين 20000 ، 25000 جنيه:



$$Z_1 = \frac{10000 - 20000}{5000}$$

$$= \frac{10000}{5000} = 2$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 2 هو 0.4772.

$$Z_2 = \frac{10000 - 25000}{5000}$$

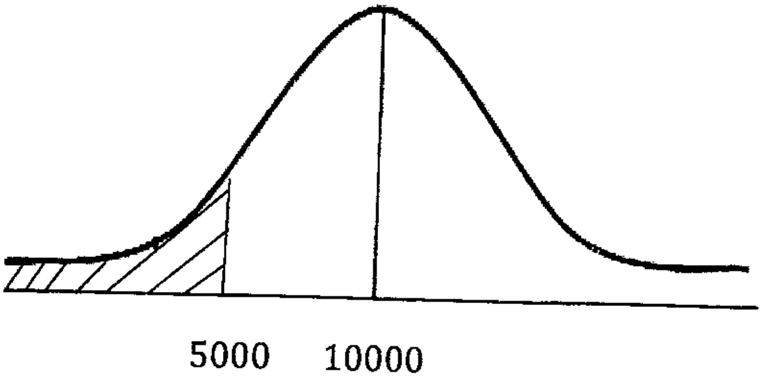
$$= \frac{15000}{5000} = 3$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 3 هو 0.4987.

∴ احتمال وجود شخص دخله بين 20000 ، 25000 جنيه

$$0.0215 = 0.4772 - 0.4987 =$$

4- ايجاد احتمال أن شخص دخله أقل من 5000 جنيه:



$$\frac{10000 - 5000}{5000} = Z$$

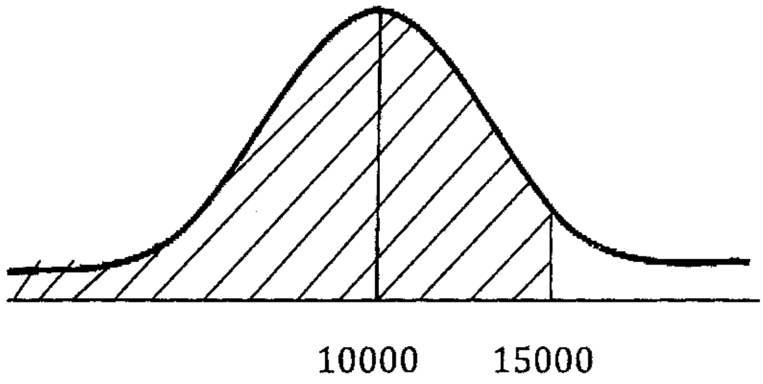
$$1- = \frac{5000-}{5000} =$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 1 هو 0.3413.

∴ احتمال أن شخص دخله أقل من 5000 جنيه = 0.5 − 0.3413

= 0.1578

5- ايجاد احتمال أن شخص دخله أقل من 15000 جنيه:



$$Z = \frac{10000 - 15000}{5000}$$

$$= \frac{5000}{5000} = 1$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 1 هو 0.3413.

∴ احتمال أن شخص دخله أقل من 15000 جنيه = 0.5 + 0.3413

= 0.8413

مثال (19):

اذا كانت أوزان طلبة كلية التجارة تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط قدره 80 كجم وانحراف معيارى 10 كجم وتم اختيار طالب عشوائيا والمطلوب :

1 – اوجد احتمال أن يكون وزن الطالب أقل من 75 كجم.

2 - اوجد احتمال أن يكون وزن الطالب أكثر من 90 كجم.

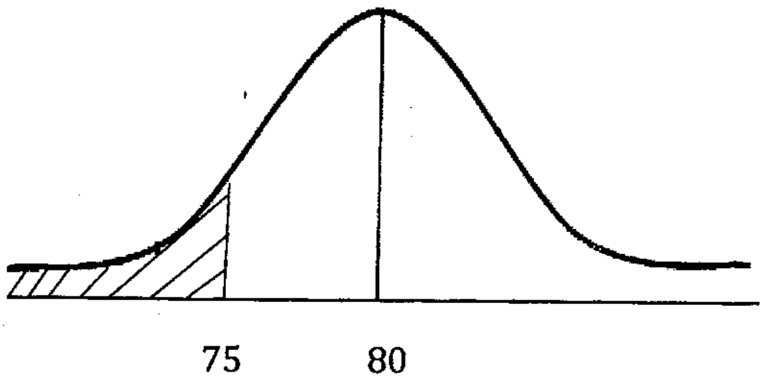
3 - اوجد احتمال أن يكون وزن الطالب أكثر من 60 كجم.

4 - اوجد احتمال أن يكون وزن الطالب بين 65 ، 85 كجم.

الحل

$80 = \mu$ $\qquad\qquad$ $10 = \sigma$

1 – ايجاد احتمال أن يكون وزن الطالب أقل من 75 كجم:



$$Z = \frac{80 - 75}{10}$$

$$= \frac{-5}{10} = -0.5$$

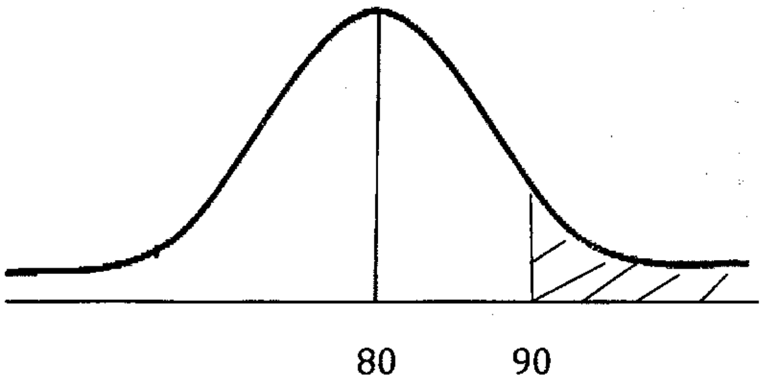
وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 0.5

هو 0.1915.

∴ احتمال أن يكون وزن الطالب أقل من 75 كجم = 0.5 − 0.1915

= 0.3085

2 - ايجاد احتمال أن يكون وزن الطالب أكثر من 90 كجم:



$$Z = \frac{80 - 90}{10}$$

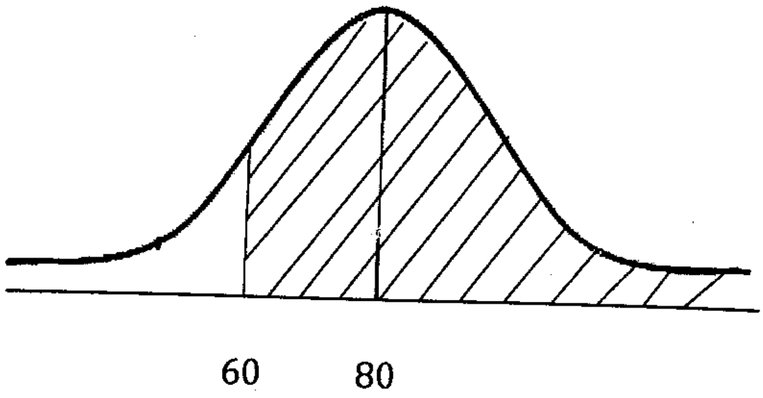
$$= \frac{10}{10} = 1$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 1 هو 0.3413.

∴ احتمال أن يكون وزن الطالب أكثر من 90 كجم = 0.5 − 0.3413

= 0.1587

3 - ايجاد احتمال أن يكون وزن الطالب أكثر من 60 كجم:



$$\frac{80 - 60}{10} = Z$$

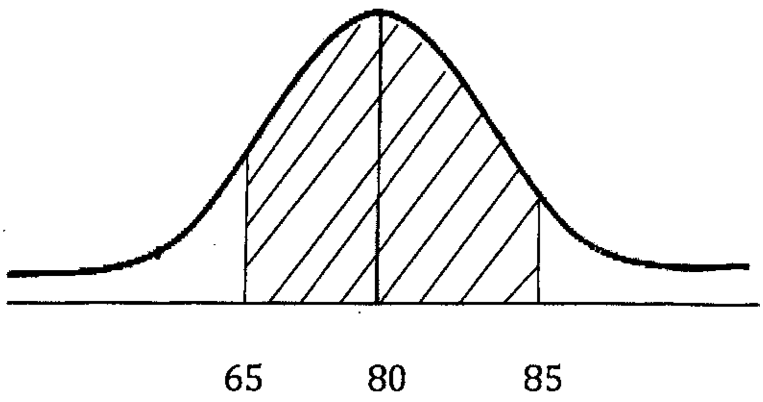
$$= \frac{20-}{10} = - 2$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 2 هو 0.4772.

∴ احتمال أن يكون وزن الطالب أكثر من 60 كجم = 0.5 + 0.4772

= 0.9772

4 - ايجاد احتمال أن يكون وزن الطالب بين 65 ، 85 كجم:



$$Z_1 = \frac{80 - 65}{10}$$

$$= \frac{-15}{10} = -1.5$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 1.5 هو 0.4332.

$$Z_2 = \frac{80 - 85}{10}$$

$$= \frac{5}{10} = 0.5$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية =0.5 هو 0.1915.

احتمال أن يكون وزن الطالب بين 65 ، 85 كجم = 0.4332 + 0.1915

= 0.6247

مثال (20):

اذا كانت أطوال الطلاب فى كلية الحقوق تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط قدره 167 سم بانحراف معيارى 5 سم فاذا كان عدد طلبة كلية الحقوق 2000 طالب اوجد ما يلى :

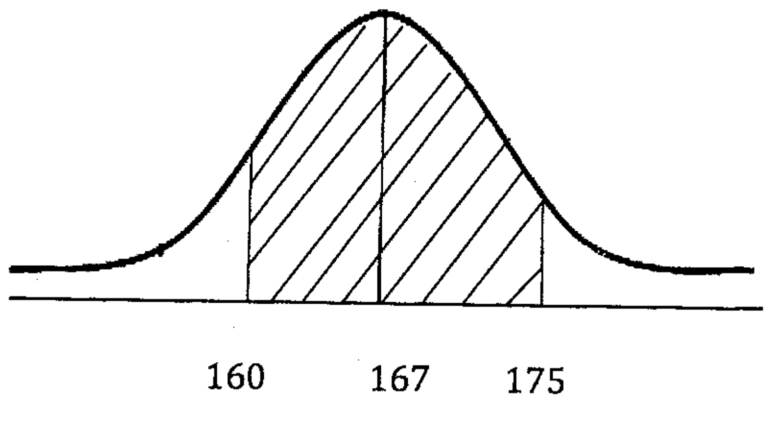
1 – عدد الطلبة الذين تكون اطوالهم بين 160 ، 175 سم.

2 – نسبة الطلبة الذين تكون اطوالهم بين 170 ، 180سم.

الحل

$\mu = 167$ $\sigma = 5$

1 – ايجاد عدد الطلبة الذين تكون اطوالهم بين 160 ، 175 سم:



$$Z_1 = \frac{167 - 160}{5}$$

$$= \frac{-7}{5} = -1.4$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 1.4

هو 0.4192

$$Z_2 = \frac{167 - 175}{5}$$

$$= \frac{8}{5} = 1.6$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية =1.6

هو 0.4452.

∴ احتمال أن الطلبة الذين تكون اطوالهم بين 160 ، 175 سم

$$= 0.4192 + 0.4452$$

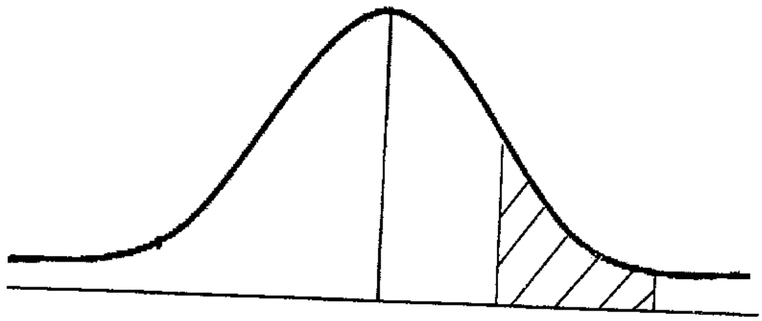
$$= 0.8644$$

∴ عدد الطلبة الذين تكون اطوالهم بين 160 ، 175 سم = 2000 X 0.8644

= 1728.8

= 1729 تقريبا

2 – ايجاد نسبة الطلبة الذين تكون اطوالهم بين 170 ، 180سم:



$$Z_1 = \frac{167 - 170}{5}$$

$$= \frac{3}{5} = 0.6$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 0.6 هو 0.2257.

$$Z_2 = \frac{167 - 180}{5000}$$

$$= \frac{13}{5} = 2.6$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية = 2.6 هو 0.4953.

۔ احتمال الطلبة الذين تكون اطوالهم بين 170 ، 180سم

= 0.4953 – 0.2257

= 0.2696

۔ نسبة الطلبة الذين تكون اطوالهم بين 170 ، 180سم = 0.2696 X 100

= 26.96 %

تحويل توزيع ذو الحدين الى التوزيع الطبيعى :

يمكن تحويل توزيع ذو الحدين الى التوزيع الطبيعى اذا توافرت الشروط الآتية :

1 – حجم العينة (ن) ≥ 30

2 – متوسط توزيع ذو الحدين μ = ن X ح ≥ 5

وفى هذه الحالة يتم ايجاد الدرجة المعيارية Z كما يلى:

$$Z = \frac{(\text{س} + 0.5) - \mu}{\sigma}$$

يستخدم هذا القانون اذا كانت

قيمة س > μ

$$Z = \frac{(\text{س} - 0.5) - \mu}{\sigma}$$

يستخدم هذا القانون اذا كانت

قيمة س < μ

حيث :

Z ⟵ الدرجة المعيارية

س ⟵ القيمة المطلوبة

μ ⟵ الو سط الحسابى لتوزيع ذو الحدين = ن X ح

σ ⟵ الانحراف المعيارى لتوزيع ذو الحدين = $\sqrt{ن \, X \, ح \, X \, (1-ح)}$

مثال (21):

اذا كان حوالى 30% من طلبة احدى المدارس الابتدائية لديهم مشكلة فى القراءة ، فاذا أخذنا عينة عشوائية حجمها 100 طالب فما هو احتمال الحصول على 15 طالب **على الأكثر** لديهم مشكلة فى القراءة ؟

الحل

احتمال أن الطالب لديه مشكلة فى القراءة

ح = 30 % = 0.30

ن = 100

بما ان :

ن = 100 > 30

ن X ح = 100 X 0.30

= 30 > 5

احتمال أن الطالب ليس لديه مشكلة فى القراءة

(1- ح) = 1- 0.30 = 0.70

س = 15 على الأكثر

∴ يمكن تحويل توزيع ذو الحدين الى توزيع طبيعى

الو سط الحسابى لتوزيع ذو الحدين μ = ن X ح

$$30 = 0.30 \times 100 =$$

الانحراف المعيارى لتوزيع ذو الحدين σ = $\sqrt{\text{ن} \times \text{ح} \times (1 - \text{ح})}$

$$= \sqrt{0.70 \times 0.30 \times 100}$$

$$= \sqrt{21}$$

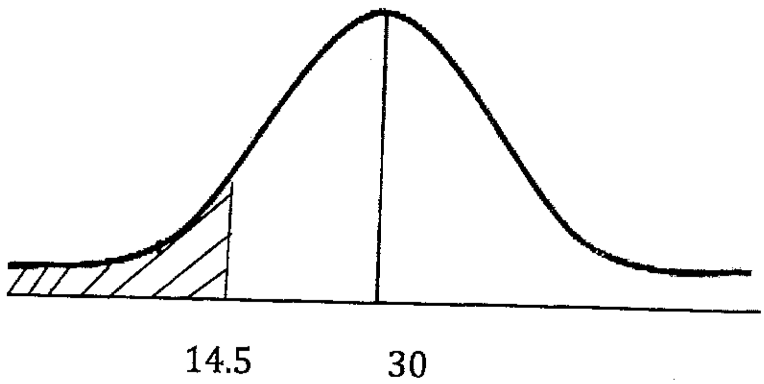
$$= 4.58$$

ايجاد احتمال أن 15 طالب على الأكثر لديهم مشكلة فى القراءة:

بما أن :

قيمة س = 15 > μ

∴ س = 15 − 0.5 = 14.5



$$Z = \frac{(س - 0.5) - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{(15 - 0.5) - 30}{4.58}$$

$$Z = \frac{14.5 - 30}{4.58}$$

$$Z = \frac{-15.5}{4.58} = -3.28$$

وبالبحث فى جدول التوزيع الطبيعى نجد أن الاحتمال المقابل لدرجة معيارية 3.28 نجد أن الاحتمال المقابل لها = 0.4995

. احتمال أن 15 طالب على الأكثر لديهم مشكلة فى القراءة = 0.5 – 0.4995

= 0.0005

تمارين

1 - اذا تم القاء قطعة عملة متكاملة التوازن ثلاث مرات أو (القاء ثلاث قطع عملة متكاملين التوازن مرة واحدة) وكان المتغير العشوائى س يعبر عن عدد مرات ظهور الكتابة . المطلوب ايجاد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س وكذلك ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى ومعامل الاختلاف.

2 - اذا تم رمى زهرة نرد متكاملة التوازن مرتين أو (رمى زهرتى نرد متكاملتى التوازن مرة واحدة) وكان المتغير العشوائى س يعبر عن الفرق بين النواتج على الزهرتين والمطلوب ايجاد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س وكذلك ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى ومعامل الاختلاف.

3 - اثبت أن الدالة الآتية هى دالة كثافة احتمال :

$$\text{د (س)} = \frac{2}{9}\ \text{س} \qquad \text{حيث} \quad 0 \leq \text{س} \leq 3$$

ثم اوجد ما يلى :

أ - ح ($1 \leq$ س ≤ 3)

ب- ح (س ≤ 2)

ج - ح (س) ≥ 1)

4 - اوجد التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى الآتى:

$$\text{د (س)} = \begin{cases} 3\,\text{س}^2 & \text{صفر} < \text{س} < 1 \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

5 - اذا تم القاء قطعة عملة 10 مرات اوجد ما يلى :

أ- احتمال عدم الحصول على كتابة.

ب- احتمال الحصول على كتابة مرة واحدة **على الأقل**.

6 - اذا تم سحب عينة حجمها خمسة وحدات من انتاج معين ، احتمال المعيب فيه 1% فما هو احتمال :

أ- عدم الحصول على وحدة سليمة فى العينة.

ب- الحصول على وحدة سليمة أوأكثر فى العينة.

ج- الحصول على ثلاث وحدات سليمة بالضبط فى العينة.

7 - اذا كان احتمال أن يولد طفل ذكر يساوى احتمال أن يولد طفل أنثى يساوى 0.45 وكانت س تمثل عدد الأطفال الذكور فى الأسرة ، اوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س لأسرة لديها 5 أطفال ثم اوجد التوقع والتباين والانحراف المعيارى.

8 - يستخدم 90% من طلاب التعليم المفتوح المحاضرات فى المذاكرة فاذا تم اختيار عينة عشوائية مكونة من 5 طلاب من طلاب التعليم المفتوح فالمطلوب ايجاد الاحتمالات الآتية:

أ- احتمال أن طالب واحد على الأقل يستخدم المحاضرات فى المذاكرة .

ب- احتمال أن طالب واحد على الأكثر يستخدم المحاضرات فى المذاكرة .

ج- احتمال أن خمسة طلاب بالضبط يستخدمون المحاضرات فى المذاكرة .

د- ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع المستخدم.

9 - اذاكانت نسبة العاملين من السيدات فى احد المصانع 70 % فاذا تم اخذ عينة عشوائية مكونة من خمسة من العاملين بالمصنع فاوجد الاحتمالات الآتية :

أ- أن يكون بالعينة سيدة واحدة.

ب- أن لايوجد بالعينة أى سيدة.

ج- وجود سيدة على الأقل بالعينة.

10 - يعمل بقسم المشتريات باحدى الشركات 40 موظف منهم 25 سيدة وقد اراد مدير الشركة اختيار لجنة مكونة من خمسة من الموظفين بقسم المشتريات وذلك للقيام بفحص الطلبية الأخيرة التى وردت للشركة والمطلوب ايجاد الاحتمالات التالية

أ - احتمال أن اللجنة تكون مكونة من 3 رجال وسيدتين.

ب - احتمال أن اللجنة تكون مكونة من رجل و4 سيدات.

ج - ايجاد التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع المستخدم

11 - شحنة مكونة من 30 وحدة وتحتوى هذه الشحنة على 5 وحدات معيبة فاذا تم سحب عينة عشوائية مكونة من 5 وحدات من هذه الشحنة اوجد الاحتمالات الآتية :

أ- احتمال الحصول على 5 وحدات معيبة .

ب- احتمال الحصول على وحدة معيبة على الأقل.

ج - احتمال الحصول 3 وحدات معيبة.

12 - اذا كان احتمال وجود وحدة معيبة فى انتاج احدى الآلات هو 2% فاذا تم أخذ عينة عشوائية من 150 وحدة من انتاج هذه الآلة المطلوب باستخدام التوزيع البواسونى ايجاد الاحتمالات الآتية :

أ- احتمال عدم وجود اى وحدة معيبة فى العينة.

ب- احتمال وجود وحدة معيبة على الأقل.

ج - احتمال وجود وحدة معيبة على الأكثر.

د - احتمال وجود ثلاث وحدات معيبة بالضبط فى العينة

13 - فى أحد مراكز بيع التليفون المحمول يرد العملاء للشراء **بمعدل** 240 عميل وذلك فى اليوم الذى يبدأ من الساعة العاشرة صباحا وحتى الساعة العاشرة مساء احسب مايلى:

أ- احتمال وصول3 عملاء كل ساعة .

ب- احتمال وصول عميل واحد على الأقل كل ساعة.

ج- احتمال وصول عميل واحد على الأقل كل نصف ساعة.

14 - اذا كان متوسط عدد الحوادث الشهرية على احد الطرق هو 5 ، فاذا تم اختيار احد الشهور عشوائيا اوجد مايلى :

أ – احتمال وقوع حادثتين على الأقل.

ب – اوجد التوقع والتباين والانحاف المعيارى للتوزيع المستخدم.

15 - اذا كان متوسط عدد المكالمات التى ترد الى سويتش احدى الشركات فى الساعة هو 24 مكالمة بتوزيع احتمال بواسونى اوجد مايلى :

أ – احتمال وصول 5 مكالمات كل ساعة.

ب – احتمال وصول 3 مكالمات كل نصف ساعة.

ج – احتمال وصول مكالمة واحدة على الأقل كل ربع ساعة.

16 - اذا كانت أوزان طلبة كلية التجارة تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط قدره 75 كجم وانحراف معيارى 5 كجم وتم اختيار طالب عشوائيا والمطلوب :

أ – اوجد احتمال أن يكون وزن الطالب أقل من 75 كجم.

ب - اوجد احتمال أن يكون وزن الطالب أكثر من 90 كجم.

ج - اوجد احتمال أن يكون وزن الطالب أكثر من 60 كجم.

د - اوجد احتمال أن يكون وزن الطالب بين 65 ، 85 كجم.

17- اذا كانت أطوال الطلاب فى كلية الشرطة تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط قدره 180 سم بانحراف معيارى 5 سم فاذا كان عدد طلبة كلية الشرطة 2000 طالب اوجد ما يلى :

أ – عدد الطلبة الذين تكون اطوالهم بين 175 ، 180 سم.

ب – نسبة الطلبة الذين تكون اطوالهم بين 170 ، 180سم.

18 - اذا كان حوالى 20% من طلبة احدى المدارس الابتدائية لديهم مشكلة فى القراءة ، فاذا أخذنا عينة عشوائية حجمها 100 طالب فما هو احتمال الحصول على 25 طالب **على الأقل** لديهم مشكلة فى القراءة ؟

الباب الثالث

الاستدلال الاحصائى

مقدمة:

تعتمد معظم الدراسات الاحصائية على القياس الكمى للظاهرة محل الدراسة ، فعندما تتم دراسة ظاهرة معينة أو متغير معين لجميع المفردات فى المجتمع الاحصائى الذى تم تحديده فإننا نجد أمامنا عددا من القياسات أو القراءات بعدد مفردات ذلك المجتمع مما يتحتم معه معرفة مختلف المقاييس الاحصائية التى تعبر وتصف بدقة هذه القياسات الكثيرة مثل :

- متوسط الظاهرة أو المتغير والذى يعبر عن القيمة التى تتمركز حولها قيم مفردات المجتمع.

- التباين الذى يقيس درجة تقارب قيم مفردات المجتمع حول المتوسط.

- نسبة وجود صفة معينة فى مفردات المجتمع.

هذه المقاييس الاحصائية (المتوسط والتباين والنسبة) تمثل بعض معالم المجتمع محل الدراسة وقد تم استنتاجها وحسابها من القياس الكمى لجميع مفردات المجتمع ،ويتضح من ذلك أنه يمكن معرفة القيمة الحقيقية لمعالم المجتمع parameters of the population فقط من خلال الحصر الشامل لجميع مفرداته.

ولكن لأسباب عملية أو اقتصادية لايمكن اتباع أسلوب الحصر الشامل وجمع البيانات عن كل المفردات.

ومن هنا جاء دورالاستدلال الاحصائى وهو دراسة كيفية تقدير معالم المجتمع المجهولة باستخدام بيانات عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع ، ويوجد نوعان من التقدير الاحصائى هما :

1- التقدير بنقطة.

2- التقدير بفترة.

أولا: التقدير بنقطة : Point Estimation

المقصود بهذا النوع من التقدير ، هو تقدير معلمة المجتمع المجهولة باحصائية نحسب قيمتها من بيانات عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع ، أى نقوم بتقدير المعلمة بقيمة واحدة فقط تحسب من العينة ، ولذلك يسمى هذا النوع من التقدير التقدير بنقطة ، فمثلا نحن نقدر الوسط الحسابى للمجتمع μ بالوسط الحسابى للعينة $\bar{س}$ ونقدر تباين المجتمع σ^2 بتباين العينة $ع^2$ وهكذا.

فاذا كنا نرغب فى تقدير احد معالم المجتمع وليكن θ (ثيتا) عن طريق عينة من المشاهدات $x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots\ldots x_n$ مسحوبة من المجتمع ، فإن القيمة التى يتم حسابها للمعلمة θ من واقع هذه المشاهدات تسمى تقديرا Estimate ويرمز لها بالرمز $\hat{\theta}$ ، بينما الدالة او الصيغة الرياضية أو الاحصائية التى تستخدم للوصول الى هذا التقدير تسمى مقدرا Estimator ، أى المقدر هو عبارة عن احصائية ، وعند التعويض فى هذه الدالة ببيانات العينة المسحوبة فالقيمة العددية التى نحصل عليها

تسمى تقدير ، أى أن المقدر متغير عشوائى تتغير قيمته من عينة الى أخرى بينما التقدير هو احدى قيم هذا المتغير.

فمثلا اذا كانت بيانات العينة هى 5 ،4 ، 6 ، 10 ، 15 فإن الوسط الحسابى لهذه العينة يمكن حسابه كالتالى:

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{40}{5} = 8$$

ومن الملاحظ ان هناك أكثر من احصائية يمكن استخدام قيمتها كتقدير للمعلمة المجهولة ، لذاك نحتاج الى معايير تساعدنا على اختيار الاحصائية التى تعتبر أفضل من غيرها لتقدير المعلمة المجهولة ، أى يجب معرفة الخصائص التى يجب أن تتوفر فى المقدر الجيد والتى سنتناولها فيما يلى.

خصائص المقدر الجيد :

من أهم الخصائص التى يجب أن تتوفر فى المقدر الجيد هى :

1- عدم التحيز Unbiasedness.

2- الكفاءة Efficiency.

3- الاتساق Consistency.

4- الكفاية Sufficiency.

وسوف نتناول بالشرح كل خاصية من هذه الخصائص كما يلى:

1- عدم التحيز: Unbiasedness

يقال للاحصائية $\hat{\theta}$ انها مقدر غير متحيز للمعلمة المجهولة θ اذا كان الوسط الحسابى لتوزيع المعاينة للاحصائية $\hat{\theta}$ يساوى المعلمة المجهولة θ ، أى اذا كان :

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

ويعتبر عدم التحيز من شروط المقدر الجيد ، حيث ان الوسط الحسابى للتوزيع هو مركز الثقل لقيم التوزيع ، أى النقطة التى تتجمع حولها القيم ، وبالتالى عندما يكون الوسط الحسابى لتوزيع المعاينة للاحصائية $\hat{\theta}$ هو المعلمة θ ، فيعنى ذلك أن قيم الاحصائية ستكون متجمعة حول وسطها الذى هو المعلمة المجهولة θ.

2- الكفاءة : Efficiency

اذا كان لدينا مقدرين بالقيمة $\hat{\theta}_1$ ، $\hat{\theta}_2$ غير متحيزين للمعلمة θ أى أن :

$$E(\hat{\theta}_1) = \theta$$

$$E(\hat{\theta}_2) = \theta$$

وكان تباين توزيع المعاينة للمقدر $\hat{\theta}_1$ أقل من تباين توزيع المعاينة للمقدر $\hat{\theta}_2$

أى ان :

تباين $\hat{\theta}_1$ < تباين $\hat{\theta}_2$

يقال فى هذه الحالة أن المقدر $\hat{\theta}_1$ أكثر كفاءة من المقدر $\hat{\theta}_2$.

3- الاتساق : Consistency

يقال للاحصائية $\hat{\theta}$ انها مقدر متسق للمعلمة المجهولة θ اذا اقترب تباينها من الصفر كلما زاد حجم العينة n.

فمثلا نجد ان الوسط الحسابى للعينة $\bar{س}$ يعتبر مقدر متسق للوسط الحسابى للمجتمع μ ، وذلك لأن تباين توزيع المعاينة للوسط الحسابى للعينة يساوى $\frac{\sigma^2}{n}$ وهذا المقدر تقل قيمته كلما زاد حجم العينة n.

4- الكفاية :Sufficiency

يقال للاحصائية $\hat{\theta}$ انها مقدرا كافيا للمعلمة المجهولة θ إذا استخدمت كل المعلومات التى تحتويها العينة عن المعلمة المراد تقديرها دون ان تفقد أى جزء من هذه المعلومات.

وعلى ذلك يمكن القول بأن الوسط الحسابى للعينة $\bar{س}$ يعتبر مقدرا كافيا للوسط الحسابى للمجتمع μ ، حيث أنه يأخذ فى الاعتبار كل المعلومات التى تحتويها العينة عن المعلمة المراد تقديرها دون ان تفقد أى جزء من هذه المعلومات.

أما الوسيط لايعتبر مقدرا كافيا للوسط الحسابى للمجتمع μ ، حيث أنه لايأخذ فى الاعتبار كل المعلومات التى تحتويها العينة عن المعلمة المراد تقديرها دون ان تفقد أى جزء من هذه المعلومات ، حيث أنه عند حساب الوسيط يتم ترتيب القيم واستخدامها فى تحديد الفئة الوسيطية ثم التعامل مع هذه الفئة فقط مهملين بقية قيم العينة.

مما سبق يمكن القول بأن الوسط الحسابى للعينة $\bar{س}$ هو أفضل احصائية تستخدم كمقدر للوسط الحسابى للمجتمع μ.

ثانيا : التقدير بفترة Interval Estimation

تناولنا فيما سبق التقدير بنقطة Point Estimation وخواص المقدر الجيد الذى يمكن استخدامه لتقدير معلمة مجهولة بقيمة واحدة ، ولكن بالطبع مهما كان المقدر جيدا فنحن لانتوقع أن تكون قيمته تساوى تماما قيمة المعلمة المجهولة حيث أنه يوجد دائما خطأ فى التقدير.

لذلك من الأفضل ايجاد فترة ما حول تقدير القيمة نتوقع أن تقع فيها القيمة الحقيقية للمعلمة المجهولة بثقة معينة ، أى بدلا من تحديد قيمة واحدة نستخدمها لتقدير المعلمة المجهولة فإننا فى هذا النوع من التقدير نحدد فترة معينة تقع فيها المعلمة المجهولة بمعامل ثقة معين ، فمثلا اذا رمزنا للمعلمة المجهولة بالرمز θ حيث θ قد تكون الوسط الحسابى للمجتمع μ أو تباين المجتمع σ^2 او نسبة صفة معينة فى المجتمع P أو أى مقياس احصائى آخر يصف المجتمع.

فإننا نحدد فترة تقع فيها هذه المعلمة كما يلى:

$$\hat{\theta}^{L} \leq \theta \leq \hat{\theta}^{U}$$

حيث:

$\hat{\theta}^{L}$ ⟸ الحد الأدنى لفترة الثقة.

$\hat{\theta}_U$ ⟸ الحد الأعلى لفترة الثقة.

والفترة $(\hat{\theta}_U \, , \, \hat{\theta}_L)$ تسمى فترة ثقة للمعلمة θ a confidence interval

الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة نعتمد فى حسابهما على بيانات العينة ، حيث أننا نعتمد على الاحصائية المستخدمة كأفضل مقدر بالقيمة للمعلمة θ وعلى توزيع المعاينة لهذا المقدر وعلى خطأه المعيارى وعلى حجم العينة وعلى معامل الثقة المرغوب فيه ، حيث المقصود بمعامل الثقة هو احتمال أن تقع القيمة الحقيقية للمعلمة المجهولة θ بين حدى الثقة.

ويمكن حساب معامل الثقة كما يلى :

معامل الثقة = $\alpha - 1$

حيث:

α ⟸ احتمال أن لاتقع القيمة الحقيقية للمعلمة المجهولة θ بين حدى الثقة وهى تسمى بمستوى المعنوية.

ومعامل الثقة يكون فى صورة نسبة مئوية والنسب الدارجة الاستخدام هى 99% ، 95% ، 90%.

وعلى ذلك يمكن التعبير عن فترة الثقة كما يلى :

$$\boxed{\text{احتمال } (\hat{\theta}_L \geq \theta \geq \hat{\theta}_U) = \alpha - 1}$$

ويوضح الجدول التالى الدرجات المعيارية المقابلة لأكثر معاملات الثقة استخداما:

معامل الثقة	%90	%95	%99
مستوى المعنوية (α)	%10	%5	%1
الدرجة المعيارية (Z)	1,645	1,96	2,575

وسوف نقوم فيما يلى باستعراض كيفية تقدير فترات الثقة لبعض معالم المجتمع الأكثر أهمية:

1- تقدير فترة الثقة للوسط الحسابى للمجتمع μ.

2- تقدير فترة الثقة لنسبة صفة معينة فى المجتمع ق.

3- تقدير فترة الثقة لتباين المجتمع σ^2.

4- تقدير فترة الثقة للفرق بين متوسطين.

5- تقدير فترة الثقة للفرق بين نسبتين.

<u>1- تقدير فترة الثقة للوسط الحسابى للمجتمع μ:</u>

عند تقدير فترة الثقة للوسط الحسابى للمجتمع μ يتم التفرقة بين الحالتين الآتيتين:

اذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم أو حجم العينة (ن) > 30

اذا كان تباين المجتمع σ^2 غير معلوم و حجم العينة (ن) < 30

أولا: اذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم أو حجم العينة (ن) > 30:

وفقا لنظرية النهاية المركزية نجد أنه اذا كان لدينا مجتمعا وسطه الحسابى μ وتباينه σ^2 (ليس من الضرورى أن يكون توزيعه توزيعا طبيعيا) وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n بحيث أن $n > 30$ فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابى للعينة $\bar{س}$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعى بوسط حسابى قدره μ وتباين قدره $\frac{\sigma^2}{n}$ ، أما اذا كان المجتمع يتبع توزيعا طبيعيا فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابى للعينة $\bar{س}$ سيكون توزيعا طبيعيا سواء كان حجم العينة صغيرا او كبيرا.

وفى هذه الحالة نستطيع تحويل $\bar{س}$ الى المتغير المعيارى Z حيث:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}}$$

حيث:

Z ⟸ الدرجة المعيارية.

$\overline{س}$ ⟸ الوسط الحسابى للعينة.

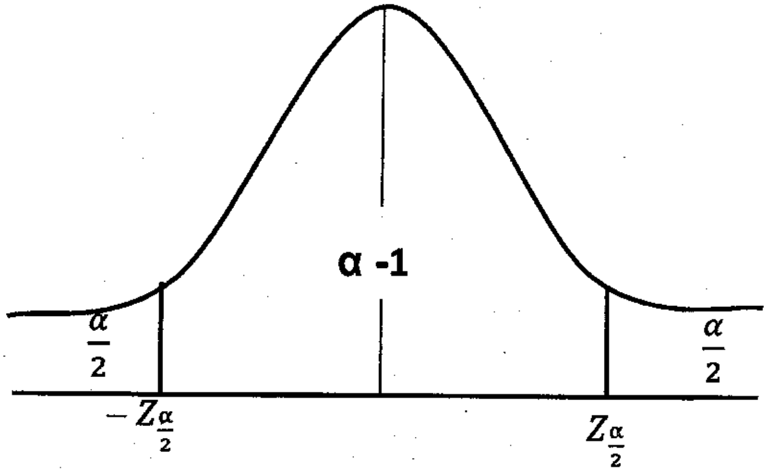
σ ⟸ الانحراف المعيارى للمجتمع.

ن ⟸ حجم العينة.

ويكون توزيع المتغير Z توزيعا طبيعيا معياريا.

ومن جدول التوزيع الطبيعى نجد أن قيمة Z التى على يمينها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$ والتى نرمز لها بالرمز $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ هى نفسها القيمة التى على يسارها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$ ولكن باشارة سالبة ولذلك نرمز لقيمة Z التى على يسارها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$ بالرمز $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ وذلك لأن المنحنى الطبيعى متماثل حول الصفر.

وبما أن المساحة على يمين القيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تساوى $\frac{\alpha}{2}$ والمساحة على يسار القيمة $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تساوى $\frac{\alpha}{2}$ ، اذن المساحة بين القيمتين ستكون $1-\alpha$ ، لأن المساحة الكلية تحت المنحنى تساوى 1، ويوضح ذلك الشكل التالى:



وحيث أن المساحة تحت المنحنى الاحتمالى هى عبارة عن احتمالات ، فيعنى ذلك أن احتمال أن يأخذالمتغير Z قيمة محصورة بين $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ، $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ يساوى $1-\alpha$ ونعبر عن ذلك بالاحتمالات كما يلى:

$$\alpha - ١ = \left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \geq \frac{\mu - \bar{\text{س}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}} \geq -Z_{\frac{\alpha}{2}} \right) \text{احتمال}$$

وباجراء بعض العمليات الجبرية على الحدود الثلاثة للمتباينة بحيث نجعل الحد الأوسط للمتباينة يحتوى على المعلمة المجهولة فقط يتم التوصل الى مايلى:

$$\alpha - ١ = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} Z_{\frac{\alpha}{2}} + \bar{\text{س}} \geq \mu \geq \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} Z_{\frac{\alpha}{2}} - \bar{\text{س}} \right) \text{احتمال}$$

ومن العلاقة السابقة يمكن استنتاج أن :

الحد الأدنى لفترة الثقة = $\bar{س} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$

الحد الأعلى لفترة الثقة = $\bar{س} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$

مثال (1):

لدراسة متوسط الأجور للموظفين بإحدى الشركات فقد تم أخذ عينة من 144 موظف فوجد أن متوسط الأجور فى العينة 2500 جنيه فاذا علمت أن الانحراف المعيارى للأجور فى الشركة هو 120 جنيه المطلوب تقدير فترة ثقة لمتوسط الأجور للموظفين بالشركة بمستوى معنوية 5%.

الحل

حجم العينة (ن) = 144 > 30

متوسط الأجور فى العينة ($\bar{س}$) = 2500 جنيه

الانحراف المعيارى للأجور فى الشركة (σ) = 120 جنيه

مستوى المعنوية (α) = 5%

معامل الثقة = 1 - α

= 1 – 5% = 95%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 95% = 1,96

فترة الثقة للوسط الحسابى فى المجتمع μ هى :

احتمال $(\bar{س} - \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{س} + \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} Z_{\frac{\alpha}{2}}) = ١ - \alpha$

احتمال $(2500 - \frac{120}{\sqrt{144}} \times 1,96 \leq \mu \leq 2500 + \frac{120}{\sqrt{144}} \times 1,96) = 95\%$

احتمال $(2500 - 19.6 \leq \mu \leq 2500 + 19.6) = 95\%$

احتمال $(2480.4 \leq \mu \leq 2519.6) = 95\%$

∴ باحتمال 95% نحن نتوقع أن تتراوح متوسط الأجور فى الشركة بين 2480.4 ، 2519.6 جنيه.

مثال (2):

فى دراسة قام بها أحد الباحثين لمتوسط وزن العبوة فى احدى شركات المواد الغذائية المحفوظة فقد تم أخذ عينة من 49 عبوة فوجد أن متوسط وزن العبوة 750 جرام بانحراف معيارى قدره 25 جرام المطلوب تقدير فترة ثقة 90% لمتوسط وزن العبوة فى الشركة.

الحل

حجم العينة (ن) = 49 > 30

متوسط وزن العبوة فى العينة ($\bar{س}$) = 750 جرام

الانحراف المعيارى فى العينة (ع) = 25 جرام

معامل الثقة = 90%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 90% = 1,645

فترة الثقة للوسط الحسابى فى المجتمع μ هى :

$$\text{احتمال}\left(\bar{س} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \leq \mu \leq \bar{س} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}\right) = ١ - \alpha$$

$$\text{احتمال}\left(750 - 1,645 \text{ X } \frac{25}{\sqrt{49}} \leq \mu \leq 750 + 1,645 \text{ X } \frac{25}{\sqrt{49}}\right) = 90\%$$

$$\text{احتمال}\left(750 - 5.875 \leq \mu \leq 750 + 5.875\right) = 90\%$$

$$\text{احتمال}\left(744.125 \leq \mu \leq 755.875\right) = 90\%$$

∴ باحتمال 90% نحن نتوقع أن يتراوح متوسط وزن العبوة فى الشركة بين 744.125 جرام ، 755.875جرام.

مثال (3):

لدراسة متوسط أوزان الطلبة فى كلية التجارة فقد تم أخذ عينة حجمها 196 طالب فوجد أن متوسط وزن الطالب 75 كيلو جرام بانحراف معيارى قدره 15 كيلو جرام المطلوب :

(أ) تقدير فترة ثقة 95 % لوزن الطالب فى كلية التجارة.

(ب) تقدير فترة ثقة 99 % لوزن الطالب فى كلية التجارة.

الحل

حجم العينة (ن) = $196 > 30$

متوسط وزن الطالب فى العينة ($\bar{س}$) = 75 كيلو جرام

الانحراف المعيارى فى العينة (ع) = 15 كيلو جرام

معامل الثقة = 95%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 90% = 1,96

معامل الثقة = 99%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 99% = 2,575

(أ) فترة الثقة للوسط الحسابى فى المجتمع μ بمعامل ثقة 95% هى :

احتمال $(\bar{س} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \leq \mu \leq \bar{س} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}) = ١-\alpha$

احتمال $(75 - 1,96 \times \frac{15}{\sqrt{196}} \leq \mu \leq 75 + 1,96 \times \frac{15}{\sqrt{196}}) = 95\%$

احتمال $(75 - 2.1 \leq \mu \leq 75 + 2.1) = 95\%$

احتمال $(72.9 \leq \mu \leq 77.1) = 95\%$

. باحتمال 95% نحن نتوقع أن يتراوح متوسط وزن العبوة فى الشركة بين 72.9 كيلوجرام ، 77.1 كيلو جرام.

(ب) فترة الثقة للوسط الحسابى فى المجتمع μ بمعامل ثقة 99% هى :

$$\text{احتمال}\left(\bar{س} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \leq \mu \leq \bar{س} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}\right) = ١-\alpha$$

$$\text{احتمال}\left(75 - 2{,}575 \times \frac{15}{\sqrt{196}} \leq \mu \leq 75 + 2{,}575 \times \frac{15}{\sqrt{196}}\right) = 99\%$$

$$\text{احتمال}\left(75 - 2.759 \leq \mu \leq 75 + 2.759\right) = 99\%$$

$$\text{احتمال}\left(72.241 \leq \mu \leq 77.759\right) = 99\%$$

∴ باحتمال 99% نحن نتوقع أن يتراوح متوسط وزن العبوة فى الشركة بين 72.241 كيلوجرام ، 77.759 كيلو جرام.

مثال (4):

اذا كان هناك مجتمعا يتبع التوزيع الطبيعى بوسط حسابى μ وتباين $\sigma^2 = 9$ فاذا سحبنا عينة عشوائية من هذا المجتمع تشمل 25 مفردة ووجدنا أن الوسط الحسابى لهذه العينة يساوى 60 ، فقدر الوسط الحسابى للمجتمع μ باستخدام فترة ثقة 95%.

الحل

حجم العينة (ن) = $25 < 30$

التباين فى المجتمع (σ^2) = 9

∴ الانحراف المعيارى فى المجتمع (σ) = $\sqrt{9} = 3$

متوسط العينة ($\bar{س}$) = 60

معامل الثقة = 95%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 95% = 1,96

فترة الثقة للوسط الحسابى فى المجتمع μ هى :

$$\text{احتمال}\ (\bar{س} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \leq \mu \leq \bar{س} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}) = ١ - \alpha$$

$$\text{احتمال}\ (60 - 1,96 \times \frac{3}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 60 + 1,96 \times \frac{3}{\sqrt{25}}) = 95\%$$

$$\text{احتمال}\ (60 - 1.176 \leq \mu \leq 60 + 1.176) = 95\%$$

$$\text{احتمال}\ (58.824 \leq \mu \leq 61.176) = 95\%$$

∴ باحتمال 95% نحن نتوقع أن تتراوح قيمة متوسط المجتمع μ بين 58.824 ، 61.176

ثانيا: اذا كان تباين المجتمع σ^2 غير معلوم و حجم العينة (ن) < 30:

اذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وكان تباينه σ^2 مجهولا ، فلكى نحصل على فترة الثقة للوسط الحسابى للمجتمع μ ، نستخدم تباين العينة ع ^{2} كمقدر بالقيمة للتباين المجهول σ^2 ، واذا وضعنا قيمة ع ^{2} بدلا من σ^2 فى العلاقة السابقة .

سنحصل على متغير عشوائى آخر يطلق عليه المتغير العشوائى(ت) حيث :

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

والمتغير العشوائى (ت) توزيعه الاحتمالى يسمى توزيع t بدرجات حرية = ن – 1 وتوزيع t هو توزيع احتمالى متصل وقد قام بتقديمه وليم جوسيت William Goset عام 1908 تحت اسم مستعار هو student ، توزيع t توزيع متماثل حول وسطه الحسابى الذى يساوى صفر ، ويعنى ذلك أنه اذا كان لدينا قيمتان للمتغير العشوائى (ت) وكانت المساحة على يمين احدى هاتين القيمتين تساوى المساحة على يسار القيمة الأخرى فستكون القيمتان متساويتان فى القيمة المطلقة ومختلفتان فى الاشارة.

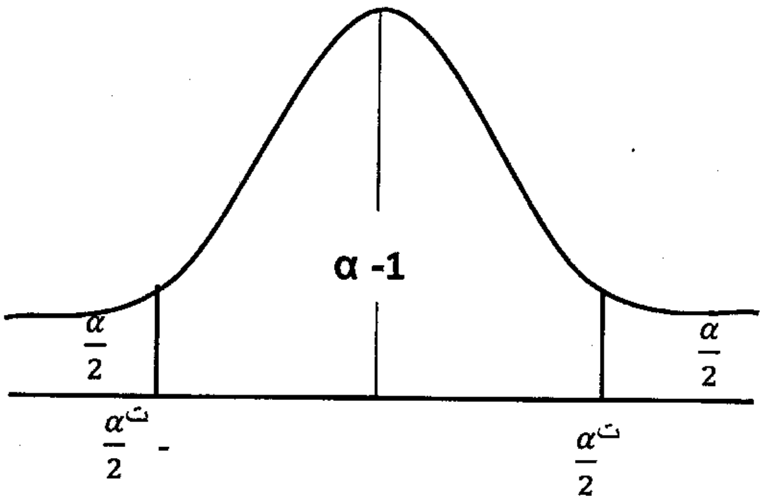
وبصفة عامة اذا رمزنا للمساحة بين قيمتين للمتغير العشوائى (ت) بالرمز $1 - \alpha$ بحيث تكون المساحة على يمين القيمة الكبرى تساوى المساحة التى على يسار القيمة الصغرى وتساوى كل منهما $\frac{\alpha}{2}$.

فستكون هاتان القيمتان متساويتين فى القيمة المطلقة ومختلفتين فى الاشارة ، وسنرمز للقيمة الكبرى التى على يمينها المساحة $\frac{\alpha}{2}$ بالرمز $ت_{\frac{\alpha}{2}}$ وبالتالى سنرمز للقيمة الأخرى بالرمز التى على يسارها المساحة $\frac{\alpha}{2}$ بالرمز $-ت_{\frac{\alpha}{2}}$.

وبما أن المساحة تحت المنحنى الاحتمالى هى عبارة عن احتمالات ، فيعنى ذلك أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائى (ت) عند درجة حرية معينة قيمة محصورة بين القيمتين $\frac{\alpha^{\text{ت}}}{2}$ ، - $\frac{\alpha^{\text{ت}}}{2}$ يساوى 1- α ونعبر عن ذلك كما يلى:

احتمال(- $\frac{\alpha^{\text{ت}}}{2}$ بدرجات حرية ن-1≤ ت ≤ $\frac{\alpha^{\text{ت}}}{2}$ بدرجات حرية ن-1) = 1-α

ويوضح ذلك الشكل التالى:



مما سبق يمكن تقدير فترة الثقة للوسط الحسابى فى المجتمع μ كما يلى:

$$\text{احتمال}\left(-ت_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{س}-\mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} \le ت_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وباجراء بعض العمليات الجبرية على الحدود الثلاثة المتباينة واعادة ترتيب المتباينة يتم التوصل الى ان فترة الثقة للوسط الحسابى فى المجتمع μ هى:

$$\text{احتمال}\left(\bar{س} - ت_{\frac{\alpha}{2}}\frac{ع}{\sqrt{ن}} \le \mu \le \bar{س} + ت_{\frac{\alpha}{2}}\frac{ع}{\sqrt{ن}}\right) = 1-\alpha$$

ويلاحظ ان الكشف فى جدول (ت) يتم كالآتى :

1- ايجاد درجات الحرية df = ن -1

2- ايجاد مستوى المعنوية α= 1- معامل الثقة ، ثم ايجاد $\frac{\alpha}{2}$

3- يتم الكشف فى جدول (ت) أمام الصف = درجات الحرية (ن-1) وتحت العمود $\frac{\alpha}{2}$

مثال (5):

سحبت عينة عشوائية من انتاج أحد مصانع انتاج اللمبات الكهربائية حجمها 12 لمبة وكان متوسط عمر اضاءة اللمبات فى العينة 780 ساعة بانحراف معيارى 15 ساعة المطلوب تقدير فترة ثقة 99% للوسط الحسابى فى المجتمع .

الحل

حجم العينة (ن) = 12 < 30

متوسط عمر اضاءة اللمبات فى العينة ($\bar{س}$) = 780 ساعة

الانحراف المعيارى فى العينة (ع) = 15

معامل الثقة = 99%

مستوى المعنوية α= 1 – 99% = 1%

كيفية الكشف عن قيمة (ت) فى الجدول:

درجات الحرية = ن -1 = 12 -1 = 11

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{.01}{2} = .005$$

• يتم البحث عن قيمة (ت) أمام الصف (درجات الحرية) = 11 وتحت العمود 005.

فنجد أن $ت_{11،.005}$ = 3.106

فترة الثقة للوسط الحسابى فى المجتمع μ هى :

$$\text{احتمال}\left(\bar{س} - ت_{\frac{\alpha}{2}} \frac{ع}{\sqrt{ن}} \leq \mu \leq \bar{س} + ت_{\frac{\alpha}{2}} \frac{ع}{\sqrt{ن}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{احتمال}\left(780 - 3.106 \frac{15}{\sqrt{12}} \leq \mu \leq 780 + 3.106 \frac{15}{\sqrt{12}}\right) = 99\%$$

$$\text{احتمال}\left(780 - 13.449 \leq \mu \leq 780 + 13.449\right) = 99\%$$

$$\text{احتمال}\left(766.551 \leq \mu \leq 793.449\right) = 99\%$$

• باحتمال 99% نحن نتوقع أن يتراوح الوسط الحسابى لعمر اضاءة اللمبات الكهربائية فى المصنع بين 766.551، 793.449 ساعة

مثال (6):

سحبت عينة عشوائية من طلاب التعليم المفتوح فكانت درجاتهم فى مادة الاحتمالات والاستنتاج الرياضى هى 7،14،13، 12،10،16 والمطلوب تقدير فترة ثقة 95% لدرجات الطلاب فى هذه المادة.

الحل

حجم العينة (ن) = 6 > 30

متوسط درجة الطالب فى العينة ($\bar{س}$) = ؟

الانحراف المعيارى فى العينة (ع) = ؟

معامل الثقة = 95%

مستوى المعنوية α= 1 – 95% = 5%

كيفية الكشف عن قيمة (ت) فى الجدول:

درجات الحرية = ن -1 = 6 -1 = 5

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{.05}{2} = .025$$

• يتم البحث عن قيمة (ت) أمام الصف (درجات الحرية) = 5 وتحت العمود .025

فنجد أن $ت_{.025،5}$ = 2.571

فترة الثقة للوسط الحسابى فى المجتمع μ هى :

$$\text{احتمال}\left(\bar{\text{س}} - \text{ت}_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}} \leq \mu \leq \bar{\text{س}} + \text{ت}_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = 1-\alpha$$

يتم ايجاد الوسط الحسابى $\bar{\text{س}}$ ، الانحراف المعيارى ع كما يلى:

س	$\bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$
13	12	1	1
7	12	5-	25
14	12	2	4
10	12	2-	4
16	12	4	16
12	12	0	0
72		صفر	50

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{72}{6} = 12$$

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}-1}}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{50}{6-1}} = \sqrt{\frac{50}{5}} = \sqrt{10} = 3.162$$

فترة الثقة للوسط الحسابى فى المجتمع μ هى :

احتمال $\left(12 - 2.571\,\frac{3.162}{\sqrt{6}} \le \mu \le 12 + 2.571\,\frac{3.162}{\sqrt{6}}\right)$

احتمال $(12 - 3.32 \le \mu \le 12 + 3.32) = 95\%$

احتمال $(8.68 \le \mu \le 15.32) = 95\%$

∴ باحتمال 95% نحن نتوقع أن يتراوح الوسط الحسابى لدرجة الطالب فى مادة الاحتمالات والاستنتاج الرياضى بين 8.68، 15.32 درجة.

2- تقدير فترة الثقة لنسبة صفة معينة فى المجتمع P:

قد يكون اهتمام الباحث بدراسة نسبة صفة معينة فى المجتمع مثال ذلك نسبة التدخين فى أحد المجتمعات أو نسبة الذين يجيدون اللغة الألمانية أو نسبة الذين يجيدون استخدام الحاسب الآلى ....وهكذا.

ومن خلال دراسة توزيع المعاينة لنسبة الصفة فى العينة ق́ وجد أن هذا التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعى عنما يكون حجم العينة ن كبيرا ، وذلك بوسط حسابى

$\mu_p = \text{ق}$ وتباين $\sigma^2_p = \frac{\text{ق ك}}{\text{ن}}$

$$\boxed{Z = \frac{\text{ق́} - \text{ق}}{\sqrt{\frac{\text{ق́}(1-\text{ق́})}{\text{ن}}}}}$$

حيث :

ق́ ⟸ النسبة فى العينة = $\frac{\text{عدد المفردات التى تتمتع بالصفة فى العينة}}{\text{حجم العينة}}$

ق ⟸ النسبة فى المجتمع.

ك ⟸ عدم توافر النسبة فى المجتمع = 1- ق

ن ⟸ حجم العينة

حيث يتبع Z تقريبيا التوزيع الطبيعى وعلى يمكن القول بأن :

$$\text{احتمال}\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \geq \frac{\acute{ق} - ق}{\sqrt{\frac{\acute{ق}(1-\acute{ق})}{ن}}} \geq - Z_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

وباجراء بعض العمليات الجبرية على الحدود الثلاثة للمتباينة يتم التوصل الى الصورة التالية :

$$\text{احتمال}\left(\acute{ق} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\acute{ق}(1-\acute{ق})}{ن}} \geq ق \geq \acute{ق} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\acute{ق}(1-\acute{ق})}{ن}} \right) = 1 - \alpha$$

مثال (7):

سحبت عينة من 500 شخص بإحدى قرى الصعيد فوجد أن من بينهم 120 شخص مصابون بمرض أنفلونزا الطيور المطلوب تقدير فترة ثقة 95% لنسبة المصابين بهذا المرض فى القرية.

الحل

حجم العينة (ن) = 500

عدد المصابين بالمرض = 120

نسبة المصابين بالمرض فى العينة (قَ) = $\frac{120}{500}$ = .24

معامل الثقة = 95%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 95% = 1,96

فترة الثقة للنسبة فى المجتمع هى:

احتمال (قَ - $Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{قَ(1- قَ)}{ن}}$ ≤ ق ≤ قَ + $Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{قَ(1- قَ)}{ن}}$) = 1 - α

احتمال (.24 – 1.96 $\sqrt{\frac{.24(1- .24)}{120}}$ ≤ ق ≤ .24 + 1.96 $\sqrt{\frac{.24(1- .24)}{120}}$)

= 95%

احتمال (.24 – .076 ≤ ق ≤ .24 + .076) = 95%

احتمال (.164 ≤ ق ≤ 0.316) = 95%

- باحتمال 95% نحن نتوقع أن يتراوح نسبة المصابين بمرض أنفلونزا الطيور فى القرية بين .164، 0.316

أى اننا باحتمال 95% نحن نتوقع أن يتراوح نسبة المصابين بمرض أنفلونزا الطيور فى القرية بين 16.4% ، 31.6%.

مثال (8):

لدراسة نسبة البطالة فى احدى أحياء محافظة القاهرة فقد تم أخذ عينة من 1000 شخص فوجد ان من بينهم 860 يعملون المطلوب تقدير فترة ثقة 99% لنسبة البطالة فى هذا الحى.

الحل

حجم العينة (ن) = 1000

عدد الذين يعملون = 860

عدد الذين لايعملون = 1000 – 860 = 140

∴ نسبة البطالة فى العينة (قَ) $= \frac{140}{1000} = .014$

معامل الثقة = 99%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 99% = 2,575

فترة الثقة للنسبة فى المجتمع هى:

$$\text{احتمال} \left(\text{قَ} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\text{قَ}(1-\text{قَ})}{\text{ن}}} \leq \text{ق} \leq \text{قَ} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\text{قَ}(1-\text{قَ})}{\text{ن}}} \right) = 1 - \alpha$$

$$\text{احتمال} \left(.014 - 2,575 \sqrt{\frac{(.014-1).014}{1000}} \leq \text{ق} \leq .014 + 2,575 \sqrt{\frac{(.014-1).014}{1000}} \right) = 99\%$$

احتمال (.014 – .0096 ≥ ق ≥ .014 + .0096) = 99%

احتمال (.0044 ≥ ق ≥ .0236) = 99%

∴ باحتمال 99% نحن نتوقع أن تتراوح نسبة البطالة فى الحى بين 0044. ، 0236.

أى اننا باحتمال 99% نحن نتوقع أن تتراوح نسبة البطالة فى الحى بين 0.44 % ، 2.36%.

مثال(9):

لدراسة نسبة الأمية فى احدى القرى فقد تم أخذ عينة من 500 فوجد أن من بينهم 120 لايعلمون القراءة والكتابة والمطلوب تقدير فترة ثقة 90% لنسبة الأمية فى هذه القرية.

الحل

حجم العينة (ن) = 500

عدد الذين لايعلمون القراءة والكتابة = 120

∴ نسبة الأمية فى العينة (قَ) = $\frac{120}{500}$ = 24.

معامل الثقة = 90%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 90% = 1,645

فترة الثقة للنسبة فى المجتمع هى:

$$\text{احتمال}\left(\acute{\text{ق}} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\acute{\text{ق}}(1-\acute{\text{ق}})}{\text{ن}}} \leq \text{ق} \leq \acute{\text{ق}} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\acute{\text{ق}}(1-\acute{\text{ق}})}{\text{ن}}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{احتمال}\left(.24 - 1.645\sqrt{\frac{.24(1-.24)}{500}} \leq \text{ق} \leq .24 + 1.645\sqrt{\frac{.24(1-.24)}{500}}\right) = 90\%$$

$$\text{احتمال}\left(.24 - .031 \leq \text{ق} \leq .24 + .031\right) = 90\%$$

احتمال (209. $\leq$ ق $\leq$ 271.) =90%

. باحتمال 90% نحن نتوقع أن تتراوح نسبة الأمية فى القرية بين 209. ، 271.

أى اننا باحتمال 90% نحن نتوقع أن تتراوح نسبة الأمية فى القرية بين 20.9 % ،

27.1%.

3- تقدير فترة الثقة لتباين المجتمع σ^2:

اذا كان لدينا مجتمع يتبع التوزيع الطبيعى بتباين معلوم σ^2 وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها ن فإن المتغير العشوائى التالى يطلق عليه χ^2 (كا^2) حيث:

$$\text{كا}^2 = \frac{\text{ع}^2(\text{ن}-1)}{\sigma^2}$$

والتوزيع الاحتمالى لهذا المتغير يسمى توزيع كا^2 بدرجات حرية = ن – 1، ويمكن الحصول على قيمتين للمتغير كا^2 عند درجة حرية معينة ، بحيث تكون المساحة على يمين القيمة الكبرى تساوى المساحة على يسار القيمة الصغرى تساوى $\frac{\alpha}{2}$ ، واذا رمزنا لكل قيمة باستعمال المساحة التى على يمينها سنرمز للقيمة الكبرى بالرمز $\text{كا}^2_{\frac{\alpha}{2}}$ وللقيمة الصغرى بالرمز $\text{كا}^2_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ وحيث ان المساحة الكلية تحت منحنى توزيع كا^2 تساوى الواحد الصحيح ، اذن المساحة بين القيمتين تساوى (1- α) ويمكن التعبير عن ذلك كما يلى:

$$\text{احتمال}\left(\text{كا}^2_{\frac{\alpha}{2}}\text{بدرجات حرية (ن-1)} \geq \frac{\text{ع}^2(\text{ن}-1)}{\sigma^2} \geq \text{كا}^2_{(1-\frac{\alpha}{2})}\text{بدرجات حرية (ن-1)}\right) = 1-\alpha$$

احتمال($كا^2_{\frac{\alpha}{2}}$ بدرجات حرية (ن-1) $\leq \frac{ع^2(ن-1)}{\sigma^2} \leq كا^2_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ بدرجات حرية (ن-1)) = $1- \alpha$

وباجراء بعض العمليات الجبرية على المتباينة السابقة يمكن التوصل الى أن:

$$\text{احتمال } \left(\frac{ع^2(ن-1)}{كا^2_{\frac{\alpha}{2}}} \geq \sigma^2 \geq \frac{ع^2(ن-1)}{كا^2_{(1-\frac{\alpha}{2})}} \right) = 1-\alpha$$

ويمكن الكشف فى جدول كا ^{2} كالآتى:

1- ايجاد درجات الحرية df = ن – 1

2- ايجاد مستوى المعنوية α= 1- معامل الثقة ثم ايجاد $\frac{\alpha}{2}$ ، 1- $\frac{\alpha}{2}$

3- يتم الكشف فى جدول كا ^{2} امام الصف (درجات الحرية) = ن – 1، وتحت العمود $\frac{\alpha}{2}$ للحد الأدنى ، 1- $\frac{\alpha}{2}$ للحد الأعلى.

مثال (10):

سحبت عينة مكونة من 8 مفردات من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعى ، وكانت بيانات العينة على الصورة 7،8،9،12،4،5،6، 13 والمطلوب تقدير فترة ثقة 99% للتباين فى المجتمع .

الحل

حجم العينة (ن) = 8

متوسط درجة الطالب فى العينة ($\bar{س}$) = ؟

الانحراف المعيارى فى العينة (ع) = ؟

معامل الثقة = 99%

مستوى المعنوية α= 1 – 99% = 1%

كيفية الكشف عن قيمة (كا ^{2}) فى الجدول:

درجات الحرية = ن -1 = 8 -1 = 7

$\frac{\alpha}{2} = \frac{.01}{2} = .005$ ، $1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - .005 = .995$

. يتم البحث عن قيمة (كا ^{2}) أمام الصف (درجات الحرية) = 7 وتحت العمود .005، نجد أن قيمة كا ^{2} للحد الأدنى = 20.28 ، وتحت العمود .995 نجد أن قيمة كا ^{2} للحد الأعلى = .989

فترة الثقة للتباين فى المجتمع σ^2 هى :

$$\text{احتمال} \left(\frac{\text{ع}^2(\text{ن}-1)}{\text{كا}^2_{\frac{\alpha}{2}}} \geq \sigma^2 \geq \frac{\text{ع}^2(\text{ن}-1)}{\text{كا}^2_{(1-\frac{\alpha}{2})}} \right) = 1 - \alpha$$

يتم ايجاد التباين ع ^{2} كما يلى:

$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})$	$\bar{\text{س}}$	س
16	4	8	12
16	4-	8	4
9	3-	8	5
4	2-	8	6
1	1	8	9
1	1-	8	7
صفر	صفر	8	8
25	5	8	13
72	صفر		64

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{64}{8} = 8$$

$$ع^2 = \frac{مجـ(س - \bar{س})^2}{ن-1}$$

$$ع^2 = \frac{72}{8-1} = \frac{72}{7} = 10.29$$

فترة الثقة للتباين فى المجتمع σ^2 هى :

$$\text{احتمال}\ \left(\frac{ع^2(ن-1)}{كا^2_{\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{ع^2(ن-1)}{كا^2_{(1-\frac{\alpha}{2})}} \right) = 1 - \alpha$$

$$\text{احتمال}\ \left(\frac{10.29(8-1)}{20.28} \le \sigma^2 \le \frac{10.29(8-1)}{.989} \right) = 99\%$$

$$\text{احتمال}\ \left(3.55 \le \sigma^2 \le 72.83 \right) = 99\%$$

ـ باحتمال 99% نحن نتوقع أن يتراوح تباين المجتمع بين 3.55 ، 72.83.

4- تقدير فترة الثقة للفرق بين متوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$:

عند تقدير فترة الثقة للفرق بين متوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ يتم التفرقة بين الحالتين الآتيتين:

اذا كان تباين المجتمعين σ^2_1 ، σ^2_2 معلوم **أو**
حجم العينة (ن$_1$) > 30
حجم العينة (ن$_2$) > 30

اذا كان تباين المجتمعين σ^2_1 ، σ^2_2 غيرمعلوم **و**
حجم العينة (ن$_1$) < 30
حجم العينة (ن$_2$) < 30

أولا: اذا كان تباين المجتمع σ^2_1، σ^2_2 معلوم أو حجم العينة (ن$_1$) > 30 و حجم العينة (ن$_2$) > 30:

نحتاج فى بعض الدراسات الاحصائية لمقارنة متوسطين حسابيين لمجتمغين ومعرفة الفرق بينهما $(\mu_1 - \mu_2)$ فاذا كان المجتمع الأول يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_1 وتباين σ^2_1 والمجتمع الثانى يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_2 وتباين σ^2_2 ، وسحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها ن$_1$ ومن المجتمع الثانى عينة عشوائية حجمها ن$_2$ ،وكانت العينتان مستقلتان ، وبدراسة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطى العينتين وجد أنه يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط قدره $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين يساوى

$\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}$ وبالتالى فان المتغير العشوائى Z يأخذ الشكل التالى:

$$Z = \frac{(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}}}$$

حيث :

$\bar{\text{س}}_1$ ⟸ الوسط الحسابى للعينة الأولى.

$\bar{\text{س}}_2$ ⟸ الوسط الحسابى للعينة الثانية.

μ_1 ⟸ الوسط الحسابى للمجتمع الأول.

μ_2 ⟸ الوسط الحسابى للمجتمع الثانى.

σ_1^2 ⟸ تباين المجتمع الأول.

σ_2^2 ⟸ تباين المجتمع الثانى.

ن_1 ⟸ حجم العينة الأولى.

ن_2 ⟸ حجم العينة الثانية.

وباستخدام خواص التوزيع الطبيعى المعيارى نجد أن :

احتمال $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

وبالتعويض عن Z بقيمتها نجد أن :

احتمال $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$

وباجراء بعض العمليات الجبرية على حدود المتباينة يمكن التوصل الى ما يلى:

$$\text{احتمال}\ \left((\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}} \le (\mu_1 - \mu_2) \le \right.$$

$$\left. (\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}} \right) = 1 - \alpha$$

مثال (11):

لمقارنة متوسط الدخل فى مدينتين أ ، ب فقد تم أخذ عينة عشوائية من كل مدينة وتم التوصل الى النتائج التى يوضحها الجدول التالى:

	المدينة (أ)	المدينة (ب)
حجم العينة	200	150
متوسط الدخل الشهرى	3000	2500
تباين الدخل	900	1600

والمطلوب تقدير فترة ثقة 95% للفرق بين متوسط الدخل الشهرى فى المدينتين.

الحل

المدينة (أ)	المدينة (ب)
$\text{ن}_1 = 200 > 30$	$\text{ن}_2 = 150 > 30$
$\bar{\text{س}}_1 = 3000$	$\bar{\text{س}}_2 = 2500$
$\text{ع}_1^2 = 900$	$\text{ع}_2^2 = 1600$

معامل الثقة = 95%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 95% = 1,96

فترة الثقة هى :

$$\geq (2^{\mu} - 1^{\mu}) \geq \sqrt{\frac{\sigma_2{}^2}{2ن} + \frac{\sigma_1{}^2}{1ن}}\, Z_{\frac{\alpha}{2}} - (\bar{س}_2 - \bar{س}_1))\ \text{احتمال}$$

$$\alpha - 1 = (\sqrt{\frac{\sigma_2{}^2}{2ن} + \frac{\sigma_1{}^2}{1ن}}\, Z_{\frac{\alpha}{2}} + (\bar{س}_2 - \bar{س}_1)$$

$$\geq (2^{\mu} - 1^{\mu}) \geq \sqrt{\frac{1600}{150} + \frac{900}{200}}\ 1.96 - (2500 - 3000))\ \text{احتمال}$$

$$\%95 = (\sqrt{\frac{1600}{150} + \frac{900}{200}}\ 1.96 + (2500 - 3000)$$

$$\%95 = (\ 7.633 + 500\ \geq (2^{\mu} - 1^{\mu}) \geq\ 7.633 - 500\ )\ \text{احتمال}$$

$$\%95 = (\ 507.633\ \geq (2^{\mu} - 1^{\mu}) \geq\ 492.367\ )\ \text{احتمال}$$

∴ باحتمال 95% نحن نتوقع أن يتراوح الفرق بين متوسط الدخل الشهرى فى المدينتين بين 492.367 ، 507.633 جنيه

مثال (12):

فى دراسة لمقارنة متوسط الأوزان للطلبة فى كلية التجارة فقد تم أخذ عينة من 60 طالب ، 40 طالبة فتبين أن متوسط أوزان الطلبة 85 كيلو جرام بانحراف معيارى 20 كيلو جرام ، وأن متوسط أوزان الطالبات 70 كيلو جرام بانحراف معيارى 15 كيلو جرام والمطلوب تقدير فترة ثقة 99 % للفرق بين متوسط أوزان الطلبة والطالبات فى كلية التجارة.

الحل

الطلبة	الطالبات
$ن_1 = 60 > 30$	$ن_2 = 40 > 30$
$\bar{س}_1 = 85$	$\bar{س}_2 = 70$
$ع_1 = 20$	$ع_2 = 15$
$ع_1^2 = 400$	$ع_2^2 = 225$

معامل الثقة = 99%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 99% = 2,575

فترة الثقة هى :

$$\geq (2^{\mu} - 1^{\mu}) \geq \sqrt{\frac{\sigma_2{}^2}{2\text{ن}} + \frac{\sigma_1{}^2}{1\text{ن}}}\; Z_{\frac{\alpha}{2}} - (\,\bar{\text{س}}_2 - \bar{\text{س}}_1\,)\,(\;\textbf{احتمال}$$

$$\alpha - 1 = (\sqrt{\frac{\sigma_2{}^2}{2\text{ن}} + \frac{\sigma_1{}^2}{1\text{ن}}}\; Z_{\frac{\alpha}{2}} + (\,\bar{\text{س}}_2 - \bar{\text{س}}_1\,)$$

$$\geq (2^{\mu} - 1^{\mu}) \geq \sqrt{\frac{225}{40} + \frac{400}{60}}\; 2.575 - (\,70 - 85\,)\,(\textbf{احتمال}$$

$$\%99 = (\sqrt{\frac{225}{40} + \frac{400}{60}}\; 2.575 + (\,70 - 85\,)$$

$$\%99 = (\;(\,9.03 + 15\,) \geq (2^{\mu} - 1^{\mu}) \geq (\,9.03 - 15\,)\,(\;\text{احتمال}$$

$$\%\,99 = (\;24.03 \geq (2^{\mu} - 1^{\mu}) \geq 5.97\;)\;\text{احتمال}$$

∴ باحتمال 99% نحن نتوقع أن يتراوح الفرق بين متوسط أوزان الطلبة والطالبات فى كلية التجارة بين 5.97 ، 24.03 كيلو جرام .

مثال (13):

فى احد البحوث لدراسة متوسط الانفاق الشهرى على اللحوم وذلك للمقارنة بين الحضر والريف فقد تم أخذ عينة عشوائية مكونة من 50 أسرة من الحضر و 40 أسرة من الريف فوجد أن متوسط الانفاق الشهرى على اللحوم 600 ، 400 جنيه على التوالى بانحراف معيارى قدره 40 ، 30 جنيه على الترتيب والمطلوب تقدير فترة ثقة 90% للفرق بين متوسط الانفاق الشهرى على اللحوم بين الحضر والريف.

الحل

الحضر | الريف

$\text{ن}_1 = 50 > 30$ | $\text{ن}_2 = 40 > 30$

$\bar{\text{س}}_1 = 600$ | $\bar{\text{س}}_2 = 400$

$\text{ع}_1 = 40$ | $\text{ع}_2 = 30$

$\text{ع}_1^2 = 1600$ | $\text{ع}_2^2 = 900$

معامل الثقة = 90%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 90% = 1,645

فترة الثقة هى :

$$\text{احتمال}\left((\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}} \le (\mu_1 - \mu_2) \le\right.$$

$$\left.(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{احتمال}\left((600 - 400) - 1.645\sqrt{\frac{1600}{50} + \frac{900}{40}} \le (\mu_1 - \mu_2) \le\right.$$

$$\left.(600 - 400) + 1.645\sqrt{\frac{1600}{50} + \frac{900}{40}}\right) = 90\%$$

احتمال (($200 - 12.144) \geq (2^{\mu} - 1^{\mu}) \geq (200 + 12.144)) =$
%90

احتمال ($187.856 \geq (2^{\mu} - 1^{\mu}) \geq 212.144) = 90\ \%$

. باحتمال 90% نحن نتوقع أن يتراوح الفرق بين متوسط الانفاق الشهرى على اللحوم بين الحضر والريف بين 187.856 ، 212.144 جنيه.

ثانيا: اذا كان تباين المجتمع σ^2 ₁، σ^2 ₂ غيرمعلوم و حجم العينة (ن $_1$) < 30 و حجم العينة (ن $_2$) < 30:

اذا كان المجتمع الأول يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_1 وتباين σ^2 وكان الإثنان مجهولان والمجتمع الثانى يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_2 وتباين σ^2 وكذلك كان الإثنان مجهولان وسحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها ن$_1$ ومن المجتمع الثانى عينة عشوائية حجمها ن$_2$ وكانت العينتان مستقلتان ، فى هذهالحالة نجد أن تباين المجتمع الأول وتباين المجتمع الثانى مجهولان ومتساويان ونعلم مما سبق أن أفضل مقدر لتباين المجتمع هو تباين العينة المسحوبة منه ، فيعنى ذلك أن أفضل مقدر لتباين المجتمع الأول هو ع$^2_1$ وأفضل مقدر لتباين المجتمع الثانى هو ع$^2_2$ وبالطبع فإن ع$^2_1$ و ع$^2_2$ مختلفان فى القيمة ، وبما ان تباين المجتمع الأول يساوى تباين المجتمع الثانى فليس من المنطق أن نقدر معلمتين متساويتين بتقديرين مختلفين لذلك نقدر التباينين بنفس المقدر وهو عبارة عن الوسط المرجح لتباين العينة الأولى وتباين العينة الثانية ويتم الترجيح بدرجة الحرية الخاصة بكل عينة ويطلق على هذا المقدر التباين المشترك ويرمز له بالرمز ع$^2_م$ ويحسب كما يلى:

$$\text{ع}_{\text{م}}^{2} = \frac{(\text{ن}_1-1)\,\text{ع}_1^{2} + (\text{ن}_2-1)\,\text{ع}_2^{2}}{(\text{ن}_1-1)+(\text{ن}_2-1)}$$

أى أن:

$$\text{ع}_{\text{م}}^{2} = \frac{(\text{ن}_1-1)\,\text{ع}_1^{2} + (\text{ن}_2-1)\,\text{ع}_2^{2}}{\text{ن}_1+\text{ن}_2-2}$$

وبذلك يتم الحصول على المتغير العشوائى ت الذى يأخذ الشكل التالى:

$$\boxed{\text{ت} = \frac{(\bar{\text{س}}_1-\bar{\text{س}}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\text{ع}_{\text{م}}^{2}\left(\frac{1}{\text{ن}_1}+\frac{1}{\text{ن}_2}\right)}}}$$ ،

وتوزيعه الاحتمالى هو توزيع t بدرجات حرية $\text{ن}_1 + \text{ن}_2 - 2$ اذن:

احتمال ($-\text{ت}_{\frac{\alpha}{2}}$ بدرجات حرية $\text{ن}_1+\text{ن}_2-2 \geq \text{ت} \geq \text{ت}_{\frac{\alpha}{2}}$ بدرجات حرية $\text{ن}_1+\text{ن}_2-2) = 1-\alpha$

أى أن :

$$\text{احتمال}\left(-\text{ت}_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{\text{س}}_1-\bar{\text{س}}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\text{ع}_{\text{م}}^{2}\left(\frac{1}{\text{ن}_1}+\frac{1}{\text{ن}_2}\right)}} \leq \text{ت}_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وباجراء بعض العمليات الجبرية على حدود المتباينة يتم التوصل الى أن :

$$\text{احتمال}\left(\left(\bar{\text{س}}_1-\bar{\text{س}}_2\right)-\text{ت}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\text{ع}_{\text{م}}^2\left(\frac{1}{\text{ن}_1}+\frac{1}{\text{ن}_2}\right)}\le(\mu_1-\mu_2)\le\right.$$

$$\left.\left(\bar{\text{س}}_1-\bar{\text{س}}_2\right)+\text{ت}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\text{ع}_{\text{م}}^2\left(\frac{1}{\text{ن}_1}+\frac{1}{\text{ن}_2}\right)}\right)=1-\alpha$$

مثال (14):

فى دراسة لمتوسط الوقت المستغرق فى انتاج سلعة معينة باستخدام طريقتين مختلفتين فقد تم أخذ عينة عشوائية مكونة من 6 وحدات تم انتاجها باستخدام الطريقة الأولى وعينة عشوائية مكونة من 5 وحدات تم انتاجها باستخدام الطريقة الثانية ويوضح الجدول التالى النتائج التى تم التوصل اليها:

	الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
متوسط الوقت المستغرق لإنتاج الوحدة	70	50
تباين الوقت المستغرق لإنتاج الوحدة	84	80

فإذا علمت ان الوقت المستغرق فى الانتاج للطريقتين يتوزع توزيعا طبيعيا بتباينين متساويين المطلوب تقدير فترة ثقة 95% للفرق بين متوسط الوقت المستغرق باستخدام الطريقتين.

الحل

الطريقة الأولى

$ن_1 = 6 < 30$

$\bar{س}_1 = 70$

$ع_1^2 = 84$

الطريقة الثانية

$ن_2 = 5 < 30$

$\bar{س}_2 = 50$

$ع_2^2 = 80$

معامل الثقة = 95%

مستوى المعنوية α = 1 – 95% = 5%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 95% = 1,96

$$ع_م^2 = \frac{ع_1^2\,(ن_1-1) + ع_2^2\,(ن_2-1)}{ن_1+ن_2-2}$$

$$ع_م^2 = \frac{84\,(6-1) + 80\,(5-1)}{6+5-2} = 82.22$$

ويتم الكشف عن قيمة ت من الجدول كما يلى :

أمام الصف = درجات الحرية = ن1 + ن2 - 2

$= 6 + 5 - 2 = 9$

تحت العمود $\frac{\alpha}{2} = \frac{.05}{2} = .025$ نجد أن :

$ت_{9\,،\,.025} = 2.262$

فترة الثقة هى :

$$\textbf{احتمال}\left((\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - ت_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{ع_م^2 \left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}\right)} \le (\mu_1 - \mu_2) \le \right.$$

$$\left. (\bar{س}_1 - \bar{س}_2) + ت_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{ع_م^2 \left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}\right)} \right) = 1 - \alpha$$

$$\text{احتمال}\left((70 - 50) - 2.262 \sqrt{82.22 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)} \le (\mu_1 - \mu_2) \le \right.$$

$$\left. (70 - 50) + 2.262 \sqrt{82.22 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)} \right) = 95\%$$

$$\text{احتمال}\left((20 - 12.42) \le (\mu_1 - \mu_2) \le (20 + 12.42) \right) = 90\%$$

$$\text{احتمال}\left(7.58 \le (\mu_1 - \mu_2) \le 32.42 \right) = 90\ \%$$

∴ باحتمال 95% نحن نتوقع أن يتراوح الفرق بين متوسط الوقت المستغرق باستخدام الطريقتين بين 7.58 ، 32.42 .

5- تقدير فترة الثقة للفرق بين نسبتين:

نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية كبيرة حجمها $ن_1$ من مجتمع نسبة حدوث ظاهرة معينة فيه $ق_1$ ونفرض أننا سحبنا عينة عشوائية أخرى كبيرة حجمها $ن_2$ من مجتمع آخر نسبة حدوث نفس الظاهرة فيه $ق_2$ فاذاكانت نسبة حدوث الظاهرة فى العينة الأولى $\acute{ق}_1$ ونسبة حدوث الظاهرة فى العينة الثانية $\acute{ق}_2$ فإن المتغير العشوائى

$(\acute{ق}_1 - \acute{ق}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط قدره $\mu = ق_1 - ق_2$ ، تباين σ^2 يساوى

$$\frac{ق_1(1-ق_1)}{ن_1} + \frac{ق_2(1-ق_2)}{ن_2}$$

وعلى نجد أن المتغير العشوائى Z يأخذ الشكل التالى :

$$\boxed{Z = \frac{(\acute{ق}_1 - \acute{ق}_2) - (ق_1 - ق_2)}{\sqrt{\frac{\acute{ق}_1(1-\acute{ق}_1)}{ن_1} + \frac{\acute{ق}_2(1-\acute{ق}_2)}{ن_2}}}}$$

والمتغير العشوائى Z سيتوزع توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعى المعيارى.

وباستخدام خواص التوزيع الطبيعى المعيارى نجد أن :

احتمال $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

وبالتعويض عن Z بقيمتها نجد أن :

$$\text{احتمال}\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\text{ق}1-\text{ق}2) - (\acute{\text{ق}}_1 - \acute{\text{ق}}_2)}{\sqrt{\frac{(1-\acute{\text{ق}}_1)\acute{\text{ق}}_1}{\text{ن}1} + \frac{(1-\acute{\text{ق}}_2)\acute{\text{ق}}_2}{\text{ن}2}}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

وباجراء بعض العمليات الجبرية على حدود المتباينة السابقة نجد ان :

$$\text{احتمال}\left((\acute{\text{ق}}_1 - \acute{\text{ق}}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{(1-\acute{\text{ق}}_1)\acute{\text{ق}}_1}{\text{ن}1} + \frac{(1-\acute{\text{ق}}_2)\acute{\text{ق}}_2}{\text{ن}2}} \leq (\text{ق}1 - \text{ق}2) \leq (\acute{\text{ق}}_1 - \acute{\text{ق}}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{(1-\acute{\text{ق}}_1)\acute{\text{ق}}_1}{\text{ن}1} + \frac{(1-\acute{\text{ق}}_2)\acute{\text{ق}}_2}{\text{ن}2}}\right)$$

$$= 1 - \alpha$$

مثال (15):

فى دراسة لتحديد نسبة الأمية فى القرى فى مصر فقد تم أخذ عينة عشوائية من 500 من احدى القرى فوجد أن من بينهم 200 يستطيعون القراءة والكتابة ، وقد تم أخذ عينة عشوائية مكونة من 400 من قرية أخرى فوجد أن من بينهم 250 يستطيعون القراءة والكتابة المطلوب تقدير فترة ثقة 95% للفرق بين نسبتى الأمية فى القريتين.

الحل

القرية الأولى

$ن_1 = 500$

عدد الذين يستطيعون = 300

القراءة والكتابة

عدد الذين لايستطيعون = 500-200

القراءة والكتابة = 300

نسبة الأمية ($\bar{ق}_1$) = $\frac{300}{500}$

= 0.6

القرية الثانية

$ن_2 = 400$

عدد الذين يستطيعون = 250

القراءة والكتابة

عدد الذين لايستطيعون = 400- 250

القراءة والكتابة = 150

نسبة الأمية ($\bar{ق}_2$) = $\frac{150}{400}$

= 0.375

معامل الثقة = 95%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 95% = 1,96

فترة الثقة للفرق بين النسبتين هى :

$$\text{احتمال}\left((\text{ق}'_1 - \text{ق}'_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\text{ق}'_1(1-\text{ق}'_1)}{\text{ن}_1} + \frac{\text{ق}'_2(1-\text{ق}'_2)}{\text{ن}_2}} \leq \right.$$

$$\left. (\text{ق}_1 - \text{ق}_2) \leq (\text{ق}'_1 - \text{ق}'_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\text{ق}'_1(1-\text{ق}'_1)}{\text{ن}_1} + \frac{\text{ق}'_2(1-\text{ق}'_2)}{\text{ن}_2}} \right)$$

$$= 1 - \alpha$$

∴ فترة الثقة للفرق بين النسبتين هى :

$$\text{احتمال}\left((0.6 - 0.375) - 1.96 \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{500} + \frac{0.375(1-0.375)}{400}} \right.$$

$$\leq (\text{ق}_1 - \text{ق}_2) \leq$$

$$\left. (0.6 - 0.375) + 1.96 \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{500} + \frac{0.375(1-0.375)}{400}} \right) =$$

$$95\%$$

$$\text{احتمال}\ (.225 - .064) \leq (\text{ق}_1 - \text{ق}_2) \leq (.225 + .064) = 95\%$$

$$\text{احتمال}\ (0.161 \leq (\text{ق}_1 - \text{ق}_2) \leq 0.289) = 95\%$$

∴ باحتمال 95% نحن نتوقع أن يتراوح الفرق بين نسبتى الأمية فى القريتين 0.161، 0.289.

أى أن:

باحتمال 95% نحن نتوقع أن يتراوح الفرق بين نسبتى الأمية فى القريتين 16.1% ، 28.9%.

مثال (16):

فى احد البحوث التسويقية تمت دراسة لمعرفة مدى تفضيل المستهلكين لمنتج معين وقد تم أخذ عينة من الرجال مكونة من 300 فوجد أن من بينهم 240 يفضلون هذا المنتج ، وتم أخذ عينة أخرى من النساء مكونة من 400 فوجد أن من بينهم 280 يفضلون هذا المنتج المطلوب انشاء فترة ثقة 90% للفرق بين نسبتى التفضيل للرجال والنساء.

الحل

الرجال	النساء
$ن_1 = 300$	$ن_2 = 400$
عدد الذين يفضلون المنتج = 240	عدد الذين يفضلون المنتج = 300
نسبة التفضيل ($\acute{ق}_1$) = $\frac{240}{300}$	نسبة الأمية ($\acute{ق}_2$) = $\frac{280}{400}$
= 0.8	= 0.7

معامل الثقة = 90%

الدرجة المعيارية (Z) المقابلة لمعامل ثقة 90% = 1,645

فترة الثقة للفرق بين النسبتين هى :

$$\text{احتمال}\left((\hat{ق}_1 - \hat{ق}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{ق}_1(1-\hat{ق}_1)}{ن_1} + \frac{\hat{ق}_2(1-\hat{ق}_2)}{ن_2}} \leq \right.$$

$$\left. (ق_1 - ق_2) \leq (\hat{ق}_1 - \hat{ق}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{ق}_1(1-\hat{ق}_1)}{ن_1} + \frac{\hat{ق}_2(1-\hat{ق}_2)}{ن_2}} \right)$$

$$= 1 - \alpha$$

. فترة الثقة للفرق بين النسبتين هى :

$$\text{احتمال}\left((0.8 - 0.7) - 1.645 \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{300} + \frac{0.7(1-0.7)}{400}} \leq \right.$$

$$(ق_1 - ق_2) \leq$$

$$\left. (0.8 - 0.7) + 1.645 \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{300} + \frac{0.7(1-0.7)}{400}} \right) = 90\%$$

$$\text{احتمال}\left(0.1 - 0.054 \leq (ق_1 - ق_2) \leq .1 + 0.054 \right) = 90\%$$

$$\text{احتمال}\left(0.046 \leq (ق_1 - ق_2) \leq 0.154 \right) = 90\%$$

. باحتمال 90% نحن نتوقع أن يتراوح الفرق بين نسبتى التفضيل للرجال والنساء بين

0.046 ،0.154

أى أن:

باحتمال 90% نحن نتوقع أن يتراوح الفرق بين نسبتى التفضيل للرجال والنساء بين 4.6% ، 15.4%.

تمارين

1- عرف باختصار كل من :

التقدير بنقطة – التقدير بفترة – مستوى المعنوية – فترة الثقة.

2 – ناقش باختصار خواص المقدر الجيد.

3- اختيرت عينة عشوائية من 100 طالب من بين طلبة التعليم المفتوح بكلية التجارة وقد أوضحت العينة أن متوسط الدخل الشهرى للطالب 1200 جنيه بانحراف معيارى 400 جنيه ، كما أن العينة كان بها 36 طالب يجيدون استخدام الحاسب الآلى والمطلوب بمعامل ثقة 95 % :

أ – تقدير فترة ثقة لمتوسط الدخل الشهرى للطالب.

ب – تقدير فترة ثقة لنسبة الطلبة الذين يجيدون استخدام الحاسب الآلى.

4 - لدراسة متوسط أوزان الطلبة فى كلية الآداب فقد تم أخذ عينة حجمها 121 طالب فوجد أن متوسط وزن الطالب 80 كيلو جرام بانحراف معيارى قدره 10 كيلو جرام المطلوب :

(أ) تقدير فترة ثقة 95 % لوزن الطالب فى كلية الآداب.

(ب) تقدير فترة ثقة 99 % لوزن الطالب فى كلية الآداب.

5 - اذا كان هناك مجتمعا يتبع التوزيع الطبيعى بوسط حسابى μ وتباين $\sigma^2 = 16$ فاذا سحبنا عينة عشوائية من هذا المجتمع تشمل 20 مفردة ووجدنا أن الوسط

الحسابى لهذه العينة يساوى 45 ، فقدر الوسط الحسابى للمجتمع μ باستخدام فترة ثقة 90%.

6 - سحبت عينة عشوائية من انتاج أحد مصانع انتاج اللمبات الكهربائية حجمها 20 لمبة وكان متوسط عمر اضاءة اللمبات فى العينة 500 ساعة بانحراف معيارى 10 ساعات المطلوب تقدير فترة ثقة 95% للوسط الحسابى فى المجتمع .

7 - سحبت عينة عشوائية من طلاب الفرقة الثانية بشعبة اللغة الانجليزية فكانت درجاتهم فى مادة الاحصاء هى 11 ، 13 ، 9 ، 16 ، 11 ، 12 والمطلوب تقدير فترة ثقة 99% لدرجات الطلاب فى هذه المادة.

8 – فى احدى الشركات تم سحب عينة عشوائية من 500 من العاملين بالشركة فوجد أن من بينهم 200 عامل يفضلون الحصول على راحة لمدة ساعة خلال عملهم اليومى للغذاء والصلاة والمطلوب تقدير فترة ثقة 90% لنسبة العمال الذين يفضلون الحصول على هذه الراحة.

9 - سحبت عينة من 400 شخص بإحدى قرى الصعيد فوجد أن من بينهم 120 شخص يفضلون مشاهدة أحد البرامج الرياضية المطلوب تقدير فترة ثقة 95% لنسبة الذين يفضلون مشاهدة هذا البرنامج فى القرية.

10 -لدراسة نسبة الأمية فى احدى القرى فقد تم أخذ عينة من 300 فوجد أن من بينهم 120 لايعلمون القراءة والكتابة والمطلوب تقدير فترة ثقة 95% لنسبة الأمية فى هذه القرية.

11 - سحبت عينة مكونة من 5 مفردات من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعى ، وكانت بيانات العينة على الصورة 7،8،9،12،4 والمطلوب تقدير فترة ثقة 95% للتباين فى المجتمع .

12- لمقارنة متوسط الانتاج لورديتين بأحد المصانع فقد تم أخذ عينة عشوائية من عدد أيام العمل لكل وردية وتم التوصل الى النتائج التى يوضحها الجدول التالى:

	الوردية الأولى	الوردية الثانية
حجم العينة	60	50
متوسط الانتاج	4000	3500
تباين الانتاج	200	250

والمطلوب تقدير فترة ثقة 95% للفرق بين متوسط الانتاج فى الورديتين.

13 - فى دراسة لمتوسط درجة ذكاء الطالب بين طلبة الثانوية العامة وقد تم أخذ عينة مكونة من 10 طلاب من احدى المدارس فوجد أن متوسط درجة ذكاء الطالب 85 درجة بانحراف معيارى 5 درجات ، وتم أخذ عينة من مدرسة أخرى مكونة من 15 طالب فوجد أن متوسط درجة ذكاء الطالب 75 درجة بانحراف معيارى 10 درجات والمطلوب تقدير فترة ثقة 95% للفرق بين متوسطى درجة الذكاء فى المدرستين.

14 - فى دراسة لتحديد نسبة الأمية فى القرى فى مصر فقد تم أخذ عينة عشوائية من 300 من احدى القرى فوجد أن من بينهم 150 يستطيعون القراءة والكتابة ، وقد تم أخذ عينة عشوائية مكونة من 400 من قرية أخرى فوجد أن من بينهم

220 يستطيعون القراءة والكتابة المطلوب تقدير فترة ثقة 90% للفرق بين نسبتى الأمية فى القريتين

15 - فى احد البحوث التسويقية تمت دراسة لمعرفة مدى تفضيل المستهلكين لمنتج معين وقد تم أخذ عينة من الرجال مكونة من 200 فوجد أن من بينهم 150 يفضلون هذا المنتج ، وتم أخذ عينة أخرى من النساء مكونة من 350 فوجد أن من بينهم 105 يفضلون هذا المنتج المطلوب انشاء فترة ثقة 99% للفرق بين نسبتى التفضيل للرجال والنساء.

الباب الرابع

اختبارات الفروض

مقدمة:

تنقسم مادة الاستنتاج الإحصائى الى نوعين هما : التقدير واختبارات الفروض ، وقد ناقشنا فى الفصل السابق موضوع التقدير وتعرضنا لكيفية استنتاج معالم المجتمع المجهولة بتقديرها بقيمة واحدة تحسب من عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع أو تقديرها بفترة حيث نكون واثقين بمقدار ثقة معين أن المعلمة المجهولة تقع داخل هذه الفترة.

وفى هذا الفصل سنتعرض لكيفية استنتاج معالم المجتمع المجهولة عن طريق اجراء اختبارات الفروض الاحصائية ، وهى الطريقة الأكثر أهمية فى ميدان الاستنتاج الاحصائى حيث تزايد الاهتمام بهذا الفرع فى السنوات الأخيرة حتى أصبح الآن يدخل فى جميع فروع العلوم المختلفة ، فمثلا فى الطب أو الزراعة أو الفلك أو علم النفس تبدأ المشكلة باهتمام الباحث باختبار بعض الفروض المتعلقة ببعض الظواهر فى مجال تخصصه ، ولكى يتأكد من صحة أو عدم صحة هذه الفروض يقوم باختيار عينة عشوائية ثم يقوم بحساب بعض المقاييس من هذه العينة ويستخدمها فى الوصول الى قرار تجاه الفروض الموضوعة.

مما سبق يمكن القول بأن اختبارات الفروض هى عبارة عن وضع تخمين معين أو اعتقاد معين بخصوص قيمة المعلمة المجهولة فى المجتمع أو بخصوص التوزيع

الاحتمالى لمجتمع ما أوبخصوص الفرق بين معلمتى مجتمعين فى حالة المقارنة بين مجتمعين، وقد يكون هذا التخمين صحيحا أو خاطئا لذلك سمى بالفرض.

ويتم التحقق من صحة او خطأ الفرض عن طريق سحب عينة من المجتمع محل الدراسة ، فاذا كانت بيانات العينة تؤيد التخمين أو الاعتقاد أى تؤيد الفرض الذى وضعناه من قبل نقبل الفرض واذا كانت لاتؤيده نرفض الفرض ، أى يتم اتخاذ القرار برفض أو قبول فرض معين بناء على البيانات التى نتحصل عليها من العينة.

ويمكن تعريف الفرض الاحصائى a statistical hypothesis كمايلى:

الفرض الاحصائى هو عبارة عن تعبير أو تخمين قد يكون صحيحا أو خاطئا حول معلمة من معالم المجتمع أو حول التوزيع الاحتمالى لمجتمع معين أو حول معلمتين أو أكثر اذا كانت الدراسة خاصة بمقارنة مجتمعين أو أكثر.

وهذه التخمينات نعبر عنها فى صورة فرضين هما:

1- فرض العدم : Null Hypothesis

فرض العدم هو التخمين أو الاعتقاد الذى يمثل الوضع الحالى ، أى الوضع الذى يأمل الباحث أن يرفضه لاعتقاده ان هناك عوامل أخرى جديدة أدت الى تغير هذا الوضع ، فهو الفرض الذى غالبا ما يعطى للمعلمة قيمة يعتقد الباحث أنها ليست القيمة الحقيقية للمعلمة ولذلك قام باجراء الاختبار ، ومن هنا جاءت تسميته بفرض العدم ، أى عدم تمثيل التعبير المذكور فى هذا الفرض للقيمة الحقيقية للمعلمة.

فمثلا اذا أردنا اختبار مدى فعالية دواء جديد فيكون فرض العدم فى هذه الحالة هو ان الدواء الجديد ليست له أى فاعلية.

وفرض العدم هو الفرض الذى دائما يحتوى على علامة المساواة ويرمز له بالرمز H_0.

2- الفرض البديل : Alternative Hypothesis

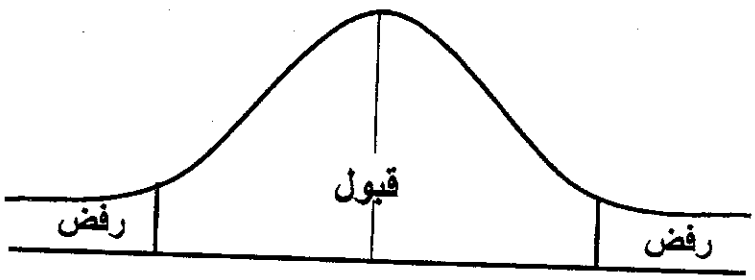
هو الفرض الذى يقبل كبديل لفرض العدم عند رفض فرض العدم ، ويرمز له بالرمز H_1.

فمثلا اذا كان فرض العدم خاصا بمساواة معلمة مجهولة ولتكن θ لقيمة معينة ولتكن θ_0 فيكون فرض العدم والفرض البديل فى هذه الحالة كما يلى:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

يقال للاختبار السابق أنه اختبار ذو جانبين Two Tail Test وتكون منطقة الرفض موزعة بالتساوى بين طرفى التوزيع ويتم التعبير عن ذلك من خلال الشكل التالى:

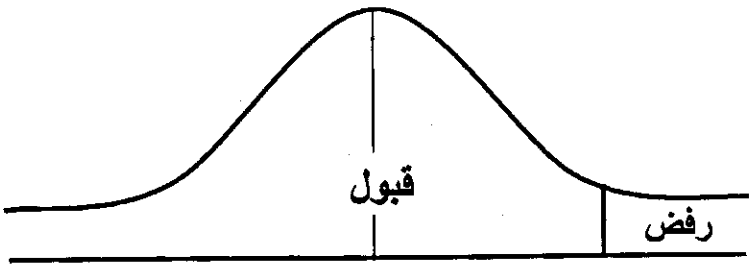


واذا كان الفرض البديل يعتبر ان المعلمة المجهولة θ أكبر من أو تساوى قيمة معينة θ_0 فيكون فرض العدم والفرض البديل فى هذه الحالة كما يلى:

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \geq \theta_0$

يقال للاختبار السابق فى هذه الحالة انه اختبار ذو جانب أيمن Right Tail Test وتكون منطقة الرفض هنا هى المنطقة التى تزيد فيها قيمة θ عن قيمة θ_0 ويتم التعبير عن ذلك من خلال الشكل التالى:

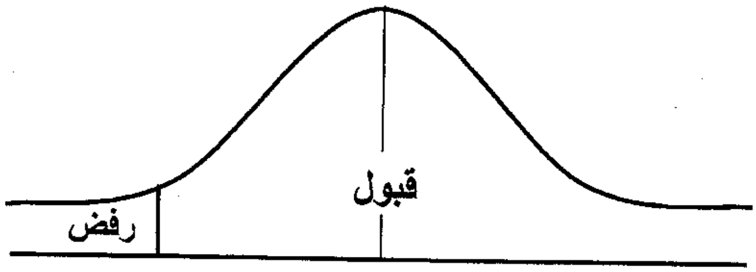


واذا كان الفرض البديل يعتبر ان المعلمة المجهولة θ أقل من أو تساوى قيمة معينة θ_0 فيكون فرض العدم والفرض البديل فى هذه الحالة كما يلى:

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \leq \theta_0$

يقال للاختبار السابق فى هذه الحالة انه اختبار ذو جانب أيسر Left Tail Test وتكون منطقة الرفض هنا هى المنطقة التى تقل فيها قيمة θ عن قيمة θ_0 ويتم التعبير عن ذلك من خلال الشكل التالى:



ولاتخاذ القرار برفض أو عدم رفض فرض العدم H_0 نعتمد على مايسمى باحصائية الاختبار حيث تعرف كما يلى:

احصائية الاختبار: Test Statistic

هى متغير عشوائى يجب أن يكون توزيعه الاحتمالى معلوما عندما يكون فرض العدم H_0 صحيحا ونستخدم فيه احصائية الاختبار المحسوبة من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع محل الدراسة والتى يطلق عليها القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار لاتخاذ القرار برفض أو عدم رفض فرض العدم H_0.

ويتم تقسيم كل النتائج الممكن الحصول عليها ، أى كل القيم التى يمكن أن تأخذها احصائية الاختبار لمجموعتين غير متداخلتين احداهما تشمل النتائج التى اذا ظهرت نقبل فرض العدم وتسمى منطقة القبول ، والأخرى تشمل كل النتائج التى اذا ظهرت نرفض فرض العدم وتسمى منطقة الرفض ، وبالتالى يمكن تقسيم توزيع المعاينة لاحصائية الاختبار الى منطقتين يمكن تعريفهما كما يلى :

منطقة القبول : Acceptance Region

هى المنطقة التى تحتوى على قيم احصائية الاختبار التى تؤدى الى عدم رفض فرض العدم H_0 ، أى قبول فرض العدم.

منطقة الرفض : Rejection Region

هى المنطقة التى تحتوى على قيم احصائية الاختبار التى تؤدى الى رفض فرض العدم H_0 ، وتسمى كذلك بالمنطقة الحرجة Critical Region.

والقيمة التى تفصل بين هاتين المنطقتين (منطقة القبول ومنطقة الرفض) بالقيمة الحرجة.

ويكون القرار برفض فرض العدم اذا كانت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار تقع فى منطقة الرفض ، وعدم رفض فرض العدم أى قبوله اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة القبول.

والقرار الذى نصل اليه بعد اجراء الاختبار لايكون صحيحا مائة فى المائة ، بل يكون معرضا لنوعين من الأخطاء هما :

1- الخطأ من النوع الأول : Type One Error

يحدث هذا الخطأ اذا كان فرض العدم فى الحقيقة صحيحا ، ولكن بيانات العينة تظهر أنه غير صحيح ، أى أن نتائج العينة تؤدى الى رفض فرض العدم مع أنه فى الواقع صحيح ، ويرمز لاحتمال وقوع الخطأ من النوع الأول بالرمز α (الفا) ويطلق عليه مستوى المعنوية.

2- الخطأ من النوع الثانى : Type Two Error

يحدث هذا الخطأ نتيجة لقبول فرض العدم مع أنه فى الواقع غير صحيح ، أى أن بيانات العينة تؤيد فرض العدم مع أن فرض العدم فى الحقيقة غير صحيح ، ويرمز الى احتمال وقوع الخطأ من النوع الثانى بالرمز β (بيتا).

ويمكن تلخيص الحالات التى يتعرض لها متخذ القرار فى الجدول التالى :

القرار	H_0	
	H_0 صحيح	H_0 غير صحيح
قبول H_0	قرار سليم	خطأ من النوع الثانى
رفض H_0	خطأ من النوع الثانى	قرار سليم

ويمكن تلخيص خطوات اختبارات الفروض الاحصائية كما يلى:

خطوات اختبارات الفروض الاحصائية:

1- صياغة الفرض العدم والفرض البديل.

2- تحديد مستوى المعنوية α ولقد جرت العادة على تحديد مستوى المعنوية قبل اجراء الاختبارات وهى عادة 1% أو 5% أو 10% وتحديد قيمتها يرتبط بالمخاطر المتعلقة بالخطأ من النوع الأول ، وهذا يتطلب معرفة المشكلة تحت الاختبار.

3- اختيار احصائية الاختبار المناسبة وهى الاحصائية التى تعتمد على أفضل مقدر بالقيمة للمعلمة المجهولة التى يجرى الاختبار بخصوصها ويجب معرفة التوزيع الاحتمالى لهذه الاحصائية عندما يكون H_0 صحيحا وذلك لتحديد منطقة الرفض ومنطقة القبول.

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم.

5- اتخاذ القرار المناسب ويكون أحد القرارين الآتيين:

(أ) نرفض فرض العدم H_0 اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة الرفض.

(ب) لانرفض فرض العدم H_0 (نقبله) اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة القبول.

وسوف نتناول فيما يلى اختبارات الفروض المتعلقة بمعالم المجتمع وهى :

1- اختبارات الفروض حول الوسط الحسابى فى المجتمع μ.

2- اختبارات الفروض حول نسبة المجتمع ق.

3- اختبارات الفروض حول تباين المجتمع σ^2.

4- اختبارات الفروض للفرق بين متوسطين.

5- اختبارات الفروض للفرق بين نسبتين.

أولا: اختبارات الفروض حول الوسط الحسابى فى المجتمع μ:

عند اجراء اختبارات الفروض حول للوسط الحسابى للمجتمع μ يتم التفرقة بين الحالتين الآتيتين:

اذا كان تباين المجتمع σ^2
معلوم
<u>أو</u> حجم العينة (ن) > 30

اذا كان تباين المجتمع σ^2
غير معلوم
<u>و</u> حجم العينة (ن) < 30

(أ) اذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم أو حجم العينة (ن) > 30:

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

$H_0 : \mu = \mu_0$

الفرض البديل H_1 يأخذ أحد ثلاثة أشكال :

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

$H_1 : \mu > \mu_0$ ⟵ اختبار ذو جانب أيمن.

$H_1 : \mu < \mu_0$ ⟵ اختبار ذو جانب أيسر.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

3- تحديد احصائية الاختبارالمناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة لاجراء اختبار حول الوسط الحسابى فى المجتمع عندما يكون σ^2 معلوم أو حجم العينة (ن) > 30 هى الصورة المعيارية للمتغير $\bar{\text{س}}$ أى هى المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى Z حيث:

$$\boxed{Z = \frac{(\bar{\text{س}} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}}}$$

ويوضح الجدول التالى الدرجات المعيارية المقابلة لأكثر معاملات الثقة استخداما:

معامل الثقة	مستوى المعنوية α	Z الجدولية		
		ذو جانبين	جانب أيمن	جانب أيسر
%90	%10	1.645 ±	1.285	1.285 -
%95	%5	1.96 ±	1.645	1.645 -
%99	%1	2.575 ±	2.325	2.325 -

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم.

5- اتخاذ القرار المناسب ويكون أحد القرارين الآتيين:

(أ) نرفض فرض العدم H_0 اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة الرفض.

(ب) لانرفض فرض العدم H_0 (نقبله) اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة القبول.

مثال (1):

يدعى أحد الباحثين أن متوسط عدد العاملين المصريين فى الشركات الأجنبية فى مصر 1200 عامل بانحراف معيارى قدره 50 وبسحب عينة عشوائية قدرها 100 شركة من الشركات الأجنبية وجد أن متوسط عدد العاملين المصريين فيها 1185عامل المطلوب اختبار الادعاء السابق عند مستوى معنوية 5%.

الحل

μ = 1200 $\qquad\qquad$ σ = 50

ن = 100 > 30 $\qquad\qquad$ $\bar{س}$ = 1185

مستوى المعنوية α = 5% (الاختبار ذو جانبين)

معامل الثقة = $1 - \alpha$ = 1- 5% = 95%

خطوات الاختبار:

1- تحديد الفرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : $\mu = 1200$

الفرض البديل H_1 : $\mu \neq 1200$

2- تحديد مستوى المعنوية α :

α = 5%

3- تحديد احصائية الاختبار :

نلاحظ من البيانات السابقة أن الانحراف المعيارى للمجتمع σ معلوم وحجم العينة

ن = 100> 30

∴ احصائية الاختبار المناسبة هى المتغير العشوائى Z والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$\boxed{Z = \frac{(\bar{\text{س}} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}}}$$

4 – تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$Z = \frac{(1200-1185)}{\frac{50}{\sqrt{100}}}$$

$$\therefore Z = \frac{-15}{\frac{50}{10}}$$

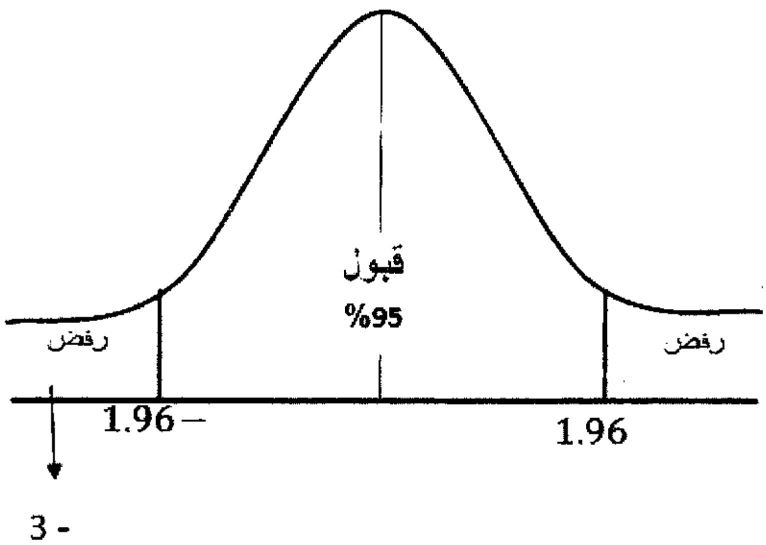
$$\therefore Z = -3$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu \neq 1200$

∴ الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلى :



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (- 3) وقعت فى منطقة الرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن $\mu = 1200$.

مثال (2):

قام أحد الباحثين بدراسة متوسط الأجور للموظفين بإحدى الشركات وقد قام بسحب عينة من 144 موظف فوجد أن متوسط الأجور فى العينة 2100 جنيه فاذا علمت أن الانحراف المعيارى للأجور فى الشركة هو 120 جنيه المطلوب اختبار الفرض بأن متوسط الأجور للموظفين بالشركة **أكبر من** 2000 جنيه بمستوى معنوية 1%.

الحل

ن = 144 $\bar{س}$ = 2100

σ = 120 μ = 2000

مستوى المعنوية α = 1%

معامل الثقة = 1 – 1% = 99%

خطوات الاختبار:

1- تحديد الفرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : $\mu = 2000$

الفرض البديل H_1 : $\mu > 2000$

2- تحديد مستوى المعنوية α :

α = 1%

3- تحديد احصائية الاختبار :

نلاحظ من البيانات السابقة أن الانحراف المعيارى للمجتمع σ معلوم وحجم العينة

ن = 144> 30

∴ احصائية الاختبار المناسبة هى المتغير العشوائى Z والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$Z = \frac{(\text{س} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}}$$

4 – تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$Z = \frac{(2100 - 2000)}{\frac{120}{\sqrt{144}}}$$

$$\therefore Z = \frac{100}{\frac{120}{12}}$$

$$\therefore Z = 10$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

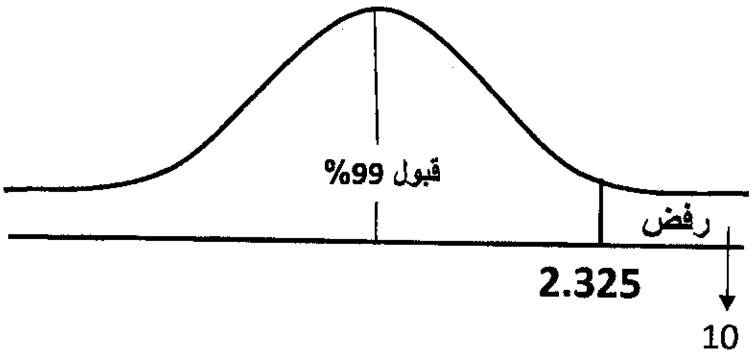
بما أن الفرض البديل H_1 : $\mu > 2000$

∴ الاختبار ذو جانب أيمن

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 99% ومستوى معنوية 1% كما يلى :

Z الجدولية = 2.325

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (10) وقعت فى منطقة االرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن μ = 2000.

مثال (3):

فى دراسة قام بها أحد الباحثين لمتوسط وزن العبوة فى احدى شركات المواد الغذائية المحفوظة فقد تم أخذ عينة من 49 عبوة فوجد أن متوسط وزن العبوة 475 جرام بانحراف معيارى قدره 25 جرام المطلوب اختبار الفرض بأن متوسط وزن العبوة فى الشركة **يقل عن** 500 جرام وذلك بمستوى معنوية 10%.

الحل

ن = 49 $\bar{س}$ = 475

ع = 25 μ = 500

مستوى المعنوية α = 10%

معامل الثقة = 1 – 10% = 90%

خطوات الاختبار:

1- تحديد الفرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم $H_0 : \mu = 500$

الفرض البديل $H_1 : \mu < 500$

2- تحديد مستوى المعنوية α :

$\alpha = 10\%$

3- تحديد احصائية الاختبار :

نلاحظ من البيانات السابقة أن الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معلوم وحجم العينة $\text{ن} = 49 > 30$

∴ احصائية الاختبار المناسبة هي المتغير العشوائى Z والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$Z = \frac{(\bar{\text{س}} - \mu)}{\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}}$$

4 – تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$Z = \frac{(500 - 475)}{\frac{25}{\sqrt{49}}}$$

$$\therefore \quad Z = \frac{-25}{\frac{25}{7}}$$

$$\therefore \quad Z = -7$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

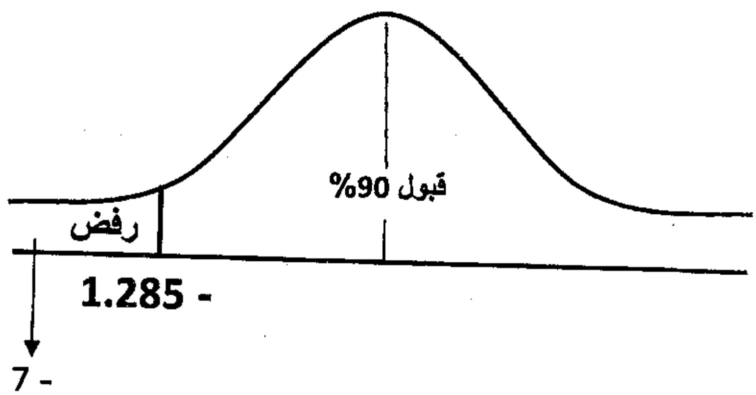
بما أن الفرض البديل H_1 : $\mu < 500$

∴ الاختبار ذو جانب أيسر

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 90% ومستوى معنوية 10% كما يلى :

Z الجدولية = 1.285

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (- 7) وقعت فى منطقة الرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن μ = 500.

مثال (4):

لدراسة متوسط أطوال الطلبة فى كلية التجارة فقد تم أخذ عينة حجمها 196 طالب فوجد أن متوسط طول الطالب 170 سنتيمتربانحراف معيارى قدره 15 سنتيمتر المطلوب اختبار الفرض القائل بأن متوسط طول الطالب فى كلية التجارة **يختلف عن** 175 سنتيمتر بمستوى معنوية 5%.

الحل

ن = 196 > 30 $\overline{س}$ = 170

ع = 15 μ = 175

مستوى المعنوية α = 5%   (الاختبار ذو جانبين)

معامل الثقة = 1 – α = 1- 5% = 95%

خطوات الاختبار:

1- تحديد الفرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : $\mu = 175$

الفرض البديل H_1 : $\mu \neq 175$

2- تحديد مستوى المعنوية α :

α = 5%

3- تحديد احصائية الاختبار :

نلاحظ من البيانات السابقة أن الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معلوم وحجم العينة ن = 196 > 30

∴ احصائية الاختبار المناسبة هى المتغير العشوائى Z والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$Z = \frac{(\bar{س} - \mu)}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

4 – تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$Z = \frac{(175-170)}{\frac{15}{\sqrt{196}}}$$

$$\therefore Z = \frac{-5}{\frac{15}{14}}$$

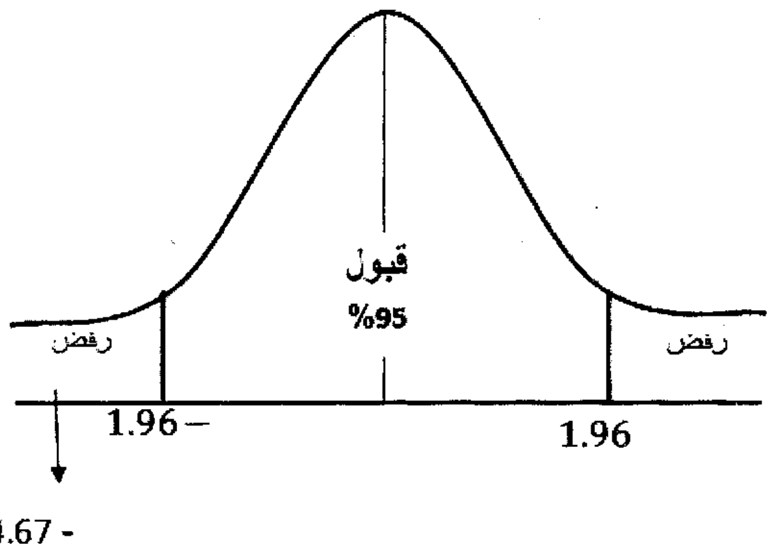
$$\therefore Z = -4.67$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu \neq 175$

. الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلي :



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (- 4.67) وقعت في منطقة الرفض .

. نرفض فرض العدم بأن $\mu = 175$.

(ب) اذا كان تباين المجتمع σ^2 غير معلوم و حجم العينة (ن) < 30:

اذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وكان تباينه σ^2 مجهولا ،في هذه الحالة نستخدم تباين العينة ع ^{2} كمقدر بالقيمة للتباين المجهول σ^2 ، واذا وضعنا قيمة ع

بدلا من σ فى العلاقة السابقة سنحصل على متغير عشوائى آخر يطلق عليه المتغير العشوائى(ت) حيث :

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

والمتغير العشوائى (ت) توزيعه الاحتمالى يسمى توزيع t بدرجات حرية = ن − 1

حيث:

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ(س - \bar{س})^2}{ن-1}}$$

$$أو\ ع = \sqrt{\frac{1}{ن-1}\left(مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}\right)}$$

ويلاحظ أن الكشف فى جدول (ت) للاختبار ذو جانبين كما يلى:

1- ايجاد درجات الحرية df = ن - 1

2- ايجاد مستوى المعنوية α = 1 − معامل الثقة ، ثم ايجاد $\frac{\alpha}{2}$

3- يتم الكشف فى جدول (ت) امام الصف = درجات الحرية (ن -1) وتحت العمود $\frac{\alpha}{2}$.

و الكشف فى جدول (ت) للاختبار ذو جانب واحد كما يلى:

1- ايجاد درجات الحرية df = ن - 1

2- ايجاد مستوى المعنوية α = 1 – معامل الثقة

3- يتم الكشف فى جدول (ت) امام الصف = درجات الحرية (ن -1) وتحت العمود α.

مثال (5):

يدعى أحد مندوبى المبيعات أن متوسط مبيعاته اليومية 18000 جنيه وللتحقق من صحة هذا الادعاء فقد تم اختيار عينة من 15 يوم فوجد أن متوسط المبيعات فى العينة 15000 جنيه بانحراف معيارى 1500 جنية والمطلوب اختبار صحة هذا الادعاء بمستوى معنوية 5% .

الحل

ن = 15 < 30 $\bar{\text{س}}$ = 15000

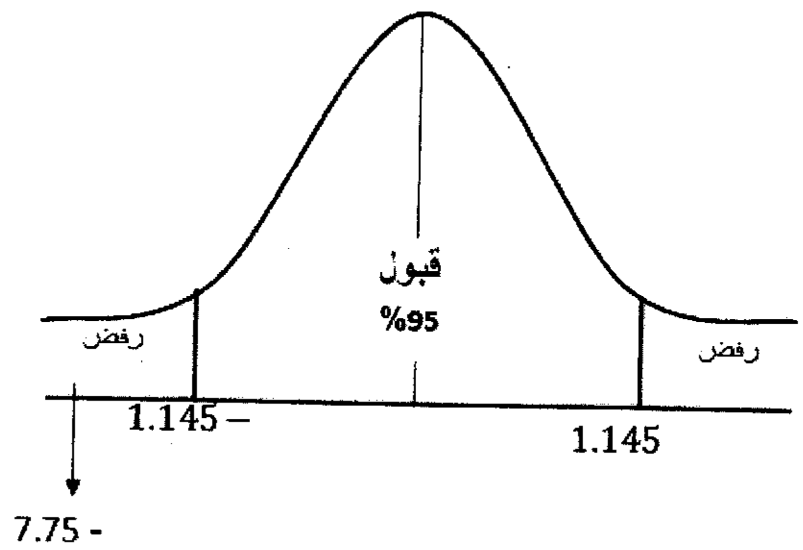
ع = 1500 μ = 18000

مستوى المعنوية α = 5% (الاختبار ذو جانبين)

معامل الثقة = 1 – α = 1- 5% = 95%

خطوات الاختبار:

1- تحديد الفرض العدم والفرض البديل :



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (- 7.75) وقعت فى منطقة الرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن μ = 15000.

مثال (6):

اذا كان متوسط الربح لسهم معين فى العام الماضى هو 5.75 جنيه وهناك اعتقاد سائد أن الربح **سيرتفع** هذا العام وللتحقق من ذلك فقد تم استطلاع راى مجموعة من خبراء المال حول متوسط الربح فوجد انه 5 ، 5.5 ، 7 ، 6 ، 6.5 ، 6 هل ترى أن الاعتقاد السابق صحيح بمستوى معنوية 1%.

الحل

ن = 6 < 30 $\qquad$ $\bar{س}$ = ؟

ع = ؟ $\qquad$ μ = 5.75

مستوى المعنوية α = 1%

معامل الثقة = 1 – 1% = 99%

خطوات الاختبار:

1- تحديد الفرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : μ = 5.75

الفرض البديل H_1 : μ > 5.75

2- تحديد مستوى المعنوية α :

α = 1%

3- تحديد احصائية الاختبار :

نلاحظ من البيانات السابقة أن الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معلوم وحجم العينة ن = 6> 30

* احصائية الاختبار المناسبة هى المتغير العشوائى ت والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

يتم ايجاد الوسط الحسابى $\bar{س}$ ، الانحراف المعيارى ع كما يلى:

ت = - 7.75 .

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu \neq 18000$

. الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة ت الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلى :

يتم الكشف عن ت الجدولية امام الصف = درجات الحرية = ن – 1

= 15 – 1= 14

وتحت العمود = $\frac{\alpha}{2} = \frac{.05}{2} = 0.025$

نجد أن ت $_{14 \text{، } 0.025}$ = 1.145

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:

فرض العدم H_0 : $\mu = 18000$

الفرض البديل H_1 : $\mu \neq 18000$

2- تحديد مستوى المعنوية α :

$\alpha = 5\%$

3- تحديد احصائية الاختبار :

نلاحظ من البيانات السابقة أن الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معلوم وحجم العينة ن = 15 < 30

- احصائية الاختبار المناسبة هى المتغير العشوائى ت والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

4 – تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$ت = \frac{15000 - 18000}{\frac{1500}{\sqrt{15}}}$$

$$ت = \frac{-3000}{\frac{1500}{\sqrt{15}}}$$

$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})$	$\bar{س}$	س
1	1 -	6	5
0.25	0.5-	6	5.5
1	1	6	7
0	0	6	6
0.25	0.5	6	6.5
0	0	6	6
2.5	صفر		36

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{36}{6} = 6$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ(س - \bar{س})^2}{ن-1}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{2.5}{6-1}} = \sqrt{\frac{2.5}{5}} = \sqrt{0.5} = 0.71$$

$$ت = \frac{(5.75 - 6)}{\frac{0.71}{\sqrt{6}}}$$

$$ت = \frac{0.25}{\frac{0.71}{\sqrt{6}}} = 0.86$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu > 5.75$

∴ الاختبار ذو جانب أيمن

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة ت الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 99% ومستوى معنوية 1% كما يلى :

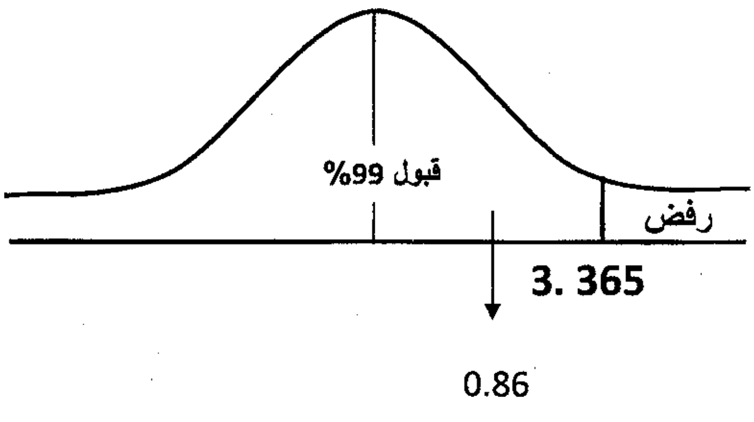
يتم الكشف عن ت الجدولية امام الصف = درجات الحرية = ن – 1

= 6 – 1= 5

وتحت العمود = α = 0.01

نجد أن ت $_{0.01 ، 5}$ = 3.365

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (0.86) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن μ = 5.75.

مثال (7):

يدعى مراجع بأحد محلات السوبر ماركت المشهورة أن متوسط عدد الأخطاء له من خلال مراجعة الفواتير **لايزيد عن** 10 أخطاء وباختيار عينة عشوائية مكونة من 20 فاتورة تبين ان متوسط عدد الأخطاء بالعينة 15 خطأ بانحراف معيارى قدره 3 والمطلوب التحقق من صحة هذا الادعاء بمستوى معنوية 5%.

الحل

$\bar{س} = 15$

ن = 20 < 30

$\mu = 10$

ع = 3

مستوى المعنوية α = 5%

معامل الثقة = $1 - \alpha$ = 1- 5% = 95%

خطوات الاختبار:

1- تحديد الفرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : $\mu = 10$

الفرض البديل H_1 : $\mu > 10$

2- تحديد مستوى المعنوية α :

α = 5%

3- تحديد احصائية الاختبار :

نلاحظ من البيانات السابقة أن الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معلوم وحجم العينة ن = 20< 30

∴ احصائية الاختبار المناسبة هى المتغير العشوائى ت والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

4 – تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$ت = \frac{(10-15)}{\frac{3}{\sqrt{20}}}$$

$$∴ ت = \frac{5}{\frac{3}{\sqrt{20}}} = 7.45$$

$$∴ ت = 7.45$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu < 10$

∴ الاختبار ذو جانب أيسر

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة ت الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلى :

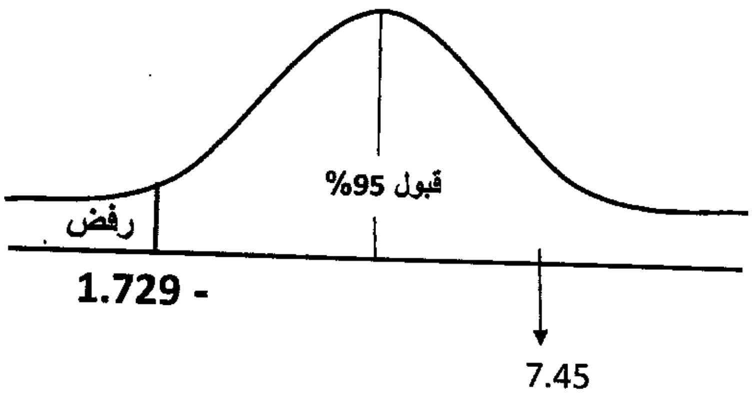
يتم الكشف عن ت الجدولية امام الصف = درجات الحرية = ن – 1

= 20 – 1= 19

وتحت العمود = α= 0.05

نجد أن ت $_{19 ، 0.05}$ = 1.729

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (7.45) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن μ = 10.

ثانيا: اختبارات الفروض حول نسبة المجتمع (ق):

قد يكون اهتمام الباحث بدراسة نسبة صفة معينة فى المجتمع مثال ذلك نسبة التدخين فى أحد المجتمعات أو نسبة الذين يجيدون اللغة الألمانية أو نسبة الذين يجيدون استخدام الحاسب الآلى ....وهكذا.

ومن خلال دراسة توزيع المعاينة لنسبة الصفة فى العينة ق´ وجد أن هذا التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعى عنما يكون حجم العينة ن كبيرا ، وذلك بوسط حسابى

$\mu_p =$ ق وتباين $\sigma^2_p = \frac{\text{ق ك}}{\text{ن}}$

$$Z_{\circ} = \frac{\text{ق}' - \text{ق}}{\sqrt{\frac{\text{ق}(1-\text{ق})}{\text{ن}}}}$$

حيث :

ق´ ⟸ النسبة فى العينة = $\frac{\text{عدد المفردات التى تتمتع بالصفة فى العينة}}{\text{حجم العينة}}$

ق ⟸ النسبة فى المجتمع.

ك ⟸ عدم توافر النسبة فى المجتمع = 1- ق

ن ⟸ حجم العينة

حيث يتبع Z تقريبيا التوزيع الطبيعى المعيارى.

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

H_0 : ق = ق$_0$

الفرض البديل H_1 يأخذ أحد ثلاثة أشكال :

H_1 : ق ≠ ق$_0$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

H_1 : ق > ق$_0$ ⟵ اختبار ذو جانب أيمن.

H_1 : ق < ق$_0$ ⟵ اختبار ذو جانب أيسر.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة لاجراء اختبار حول النسبة فى المجتمع هى المتغير العشوائى Z والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$Z = \frac{\acute{ق} - ق}{\sqrt{\frac{ق(1-ق)}{ن}}}$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم.

5- اتخاذ القرار المناسب ويكون أحد القرارين الآتيين:

(أ) نرفض فرض العدم H_0 اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة الرفض.

(ب) لانرفض فرض العدم H_0 (نقبله) اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة القبول.

مثال (8):

سحبت عينة عشوائية من احد مصانع انتاج المصابيح الكهربائية تحتوى على 50 مصباح ووجد فيها مصباحان تالفان فهل نستطيع القول أن نسبة المصابيح التالفة فى الانتاج الكلى للمصنع **أكثر من** 3% اختبر ذلك باستخدام مستوى معنوية 5%.

الحل

ن = 50 عدد المصابيح التالفة = 2

نسبة المصابيح التالفة فى العينة (قَ) = $\frac{2}{50}$ = 0.04

النسبة فى المجتمع (ق) = 0.03

مستوى المعنوية α = 5%

خطوات الاختبار:

1- فرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : ق = 0.03

الفرض البديل H_1 : ق > 0.03

2- تحديد مستوى المعنوية :

$\alpha = 5\%$

3- تحديد احصائية الاختبارالمناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة لاجراء اختبار حول النسبة فى المجتمع هى المتغير العشوائى Z والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$Z = \frac{\acute{ق} - ق}{\sqrt{\frac{ق\,(1-ق)}{ن}}}$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم:

$$Z = \frac{.04 - .03}{\sqrt{\frac{0.03\,(1 - 0.03)}{50}}}$$

$$Z = \frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.03 \; X \; .97}{50}}}$$

$Z = 0.41$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

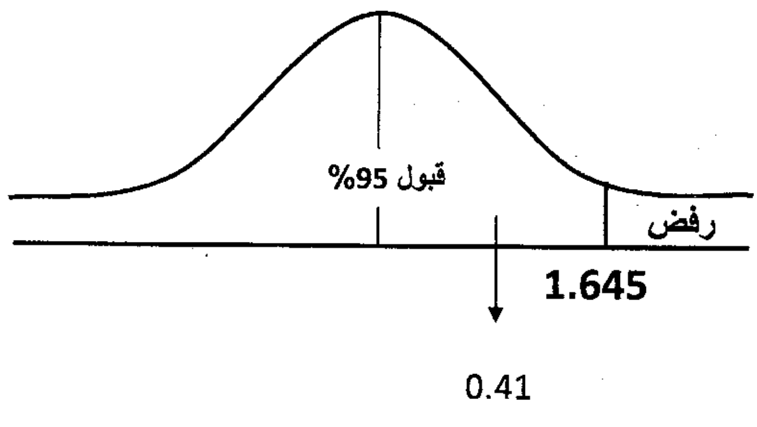
بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : ق > 0.03

∴ الاختبار ذو جانب أيمن

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلى :

Z الجدولية = 1.645

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (0.41) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن ق = 0.03

مثال (9):

يدعى احد الباحثين أن نسبة الطلاق بين المتزوجين حديثا **تزيد عن** 30% وللتحقق من صحة هذا الادعاء فقد تم اختيار عينة عشوائية من المتزوجين حديثا حجمها 200

فوجد ان حالات الطلاق فى العينة 63 حالة هل تؤكد بيانات العينة ادعاء هذا الباحث بمستوى معنوية 1%؟

الحل

ن = 200 عدد حالات الطلاق = 63

نسبة الطلاق فى العينة (قَ) = $\frac{63}{200}$= 0.315

النسبة فى المجتمع (ق) = 0.30

مستوى المعنوية α = 1%

خطوات الاختبار:

1- فرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : ق = 0.30

الفرض البديل H_1 : ق > 0.30

2- تحديد مستوى المعنوية :

α = 1%

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة لاجراء اختبار حول النسبة فى المجتمع هى المتغير العشوائى Z والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$\therefore Z = \frac{\text{ق}' - \text{ق}}{\sqrt{\frac{\text{ق}(1-\text{ق})}{\text{ن}}}}$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم:

$$Z = \frac{.315 - .30}{\sqrt{\frac{0.30\,(1 - 0.30)}{200}}}$$

$$Z = \frac{0.015}{\sqrt{\frac{.70\ X\ 0.30}{200}}}$$

$\therefore Z = 0.46$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

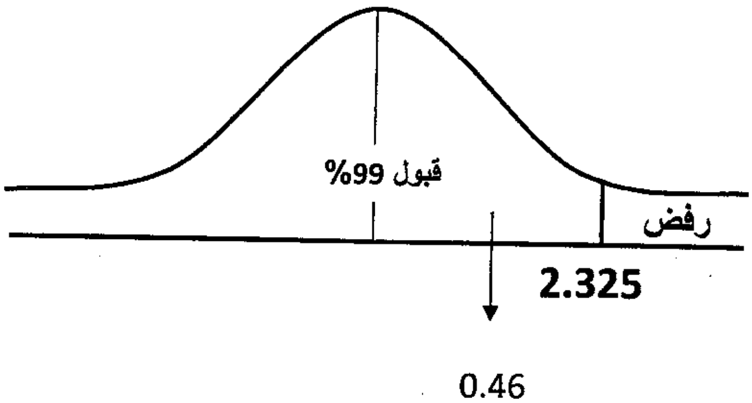
بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : ق > 0.30

∴ الاختبار ذو جانب أيمن

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 99% ومستوى معنوية 1% كما يلى :

Z الجدولية = 2.325

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (0.46) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن ق = 0.30

مثال (10):

أوضحت احدى الدراسات الاحصائية السابقة أن نسبة الرجال المدخنين فى احدى المدن 20% وقد تم عمل حملة قوية لمكافحة التدخين فى هذه المدينة وبعد انتهاء هذه الحملة تم أخذ عينة عشوائية من هذه المدينة تشمل 1800 رجل فكان عدد المدخنين فى هذه العينة 270 بمستوى معنوية 10% هل تؤيد بيانات العينة نجاح هذه الحملة؟

الحل

ن = 1800 عدد الرجال المدخنين = 270

نسبة المدخنين فى العينة (قَ) = $\frac{270}{1800} = 0.15$

النسبة فى المجتمع (ق) = 0.20

مستوى المعنوية $\alpha = 10\%$

خطوات الاختبار:

1- فرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : ق = 0.20

الفرض البديل H_1 : ق < 0.20

2- تحديد مستوى المعنوية :

$\alpha = 10\%$

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة لاجراء اختبار حول النسبة فى المجتمع هى المتغير العشوائى Z والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$Z = \frac{\acute{\text{ق}} - \text{ق}}{\sqrt{\frac{\text{ق}(1-\text{ق})}{\text{ن}}}}$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم:

$$Z = \frac{.20 - .15}{\sqrt{\frac{(.20 - 1)\ .20}{1800}}}$$

$$Z = \frac{-0.05}{\sqrt{\frac{.80 \times 0.20}{1800}}}$$

∴ $Z = -5.3$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : ق < 0.20

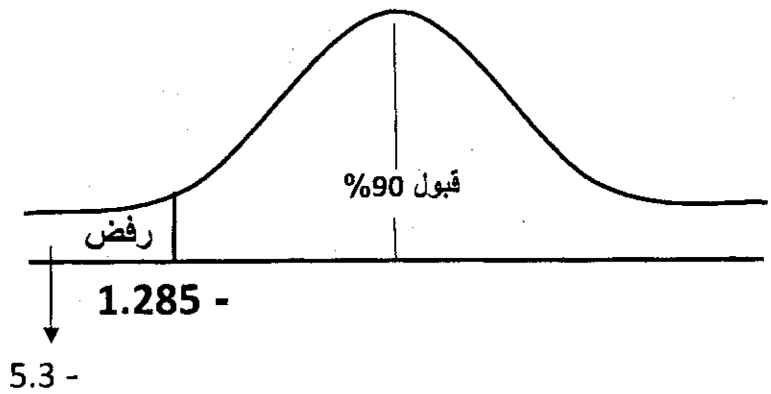
∴ الاختبار ذو جانب أيسر

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 90%

ومستوى معنوية 10% كما يلى :

Z الجدولية = 1.285

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (5.3) وقعت فى منطقة الرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن ق = 0.20.

يتضح مما سبق أن حملة مكافحة التدخين لم تنجح.

مثال (11):

اذا علمت أن نسبة الطالبات فى المرحلة الابتدائية 45% فاذا سحبنا عينة عشوائية من 1500 طفلا من اطفال هذه المرحلة ووجدنا ان عدد الطالبات 800 هل نستطيع القول بأن نسبة الطالبات فى هذه المرحلة قد اختلفت اختبر ذلك بمستوى معنوية 5%.

الحل

ن = 1500 عدد الطالبات فى العينة = 800

نسبة الطالبات فى العينة (قَ) = $\frac{800}{1500}$ = 0.533

النسبة فى المجتمع (ق) = 0.45

مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$

خطوات الاختبار:

1- فرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : ق $= 0.45$

الفرض البديل H_1 : ق $\neq 0.45$

2- تحديد مستوى المعنوية :

$\alpha = 5\%$

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة لاجراء اختبار حول النسبة فى المجتمع هى المتغير العشوائى Z والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$Z = \frac{\acute{ق} - ق}{\sqrt{\frac{ق\,(1-ق)}{ن}}}$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم:

$$Z = \frac{.533 - .45}{\sqrt{\frac{(1 - .45)\,.45}{1500}}}$$

$$Z = \frac{.083}{\sqrt{\frac{.55 \ X \ 0.45}{1500}}}$$

$\therefore Z = 6.46$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

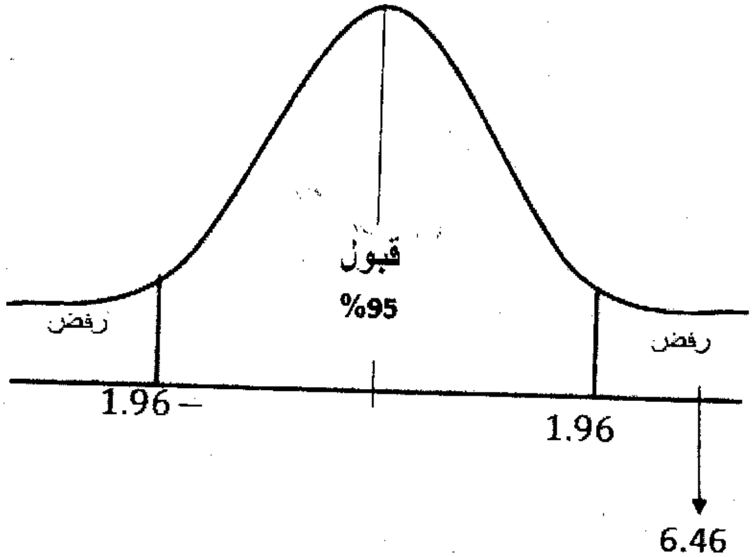
بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : ق $\neq$ 0.45

∴ الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95%

ومستوى معنوية 5% كما يلي :

Z الجدولية = 1.96



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (6.46) وقعت فى منطقة الرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن ق = 0.45.

ثالثا: اختبارات الفروض حول تباين المجتمع σ^2:

اذا كان لدينا مجتمع يتبع التوزيع الطبيعى تباينه σ^2 مجهول ، وأردنا اجراء اختبارات حول المعلمة المجهولة σ^2 فان احصائية الاختبار المناسبة فى هذه الحالة هى الاحصائية التى تعتمد على أفضل مقدر بالقيمة للمعلمة المجهولة ، وهو تباين العينة $ع^2$ و هذه الاحصائية هى المتغير العشوائى χ^2 ($كا^2$) حيث:

$$كا^2 = \frac{ع^2(ن-1)}{\sigma^2}$$

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

الفرض البديل H_1 يأخذ أحد ثلاثة أشكال :

$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ⟵ اختبار ذو جانب أيمن.

$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ ⟵ اختبار ذو جانب أيسر.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

3- تحديد احصائية الاختبارالمناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة لاجراء اختبار حول التباين فى المجتمع σ^2 هو المتغير العشوائى χ^2 (كا^2) حيث:

$$\text{كا}^2 = \frac{\text{ع}^2(\text{ن}-1)}{\sigma^2}$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم.

5- اتخاذ القرار المناسب ويكون أحد القرارين الآتيين:

(أ) نرفض فرض العدم H_0 اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة الرفض.

(ب) لانرفض فرض العدم H_0 (نقبله) اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة القبول.

مثال (12):

اذا علمت ان درجات الامتحان النهائى لطلبة الشهادة الاعدادية فى مادة الرياضيات تتوزع توزيعا طبيعيا بتباين قدره 144 ، فاذا تم اتباع طريقة جديدة فى تدريس هذه المادة ويعتقد انها ستقلل من تباين درجات الطلاب ولاختبار هذا الادعاء تم سحب عينة عشوائية من 25 طالب وبعد ان تم تدريسهم بالطريقة الجديدة واجرى لهم الامتحان كان تباين درجاتهم 120 ، فهل تؤيد نتائج العينة الاعتقاد بان الطريقة الجديدة **تقلل** تباين درجات الامتحان النهائى لكل طلبة الشهادة الاعدادية فى هذه المادة وذلك باستخدام مستوى معنوية 5%.

الحل

التباين فى المجتمع (σ^2) = 144

حجم العينة (ن) = 25

التباين فى العينة ($ع^2$) = 120

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

$H_0 : \sigma^2 = 144$

$H_1 : \sigma^2 < 144$ ⟵ اختبار ذو جانب أيسر.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة لاجراء اختبار حول التباين فى المجتمع σ^2 هو المتغير العشوائى χ^2 (كا^2) حيث:

$$كا^2 = \frac{ع^2(ن-1)}{\sigma^2}$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم:

$$كا^2 = \frac{120(25-1)}{144} = 20$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل $H_1 : \sigma^2 < 144$

∴ الاختبار ذو جانب أيسر

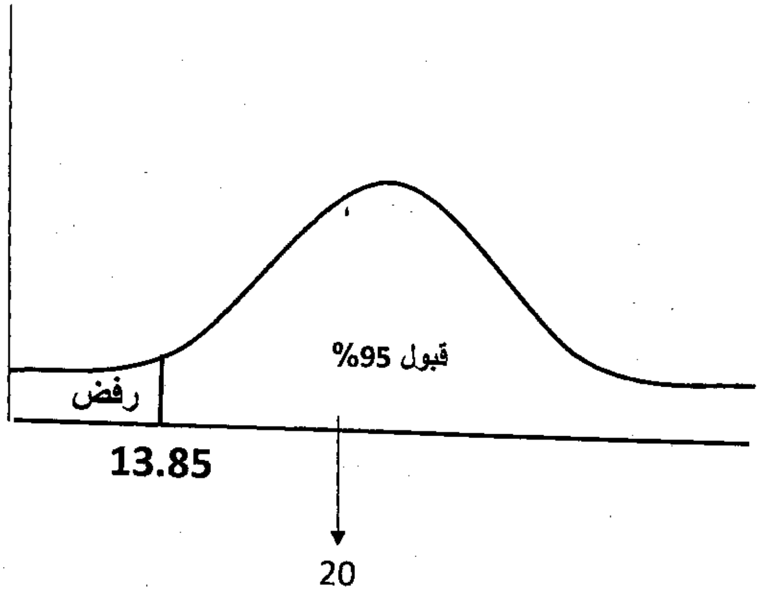
وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة كا^2 الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلى :

بالبحث فى جدول كا ^{2} امام الصف = درجات الحرية = ن – 1 = 25 -1 = 24

وتحت العمود (1- α) = (1 – 0.05) = 0.95 نجد ان :

كا $^2{}_{24، 0.95}$ = 13.85

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (20) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن : $\sigma^2 = 144$.

مما سبق يتضح ان الطريقة الجديدة فى التدريس لم تؤدى الى تقليل التباين.

رابعا: اختبارات الفروض للفرق بين متوسطين:

نحتاج فى بعض الدراسات الاحصائية لاجراء اختبارات الفروض حول متوسطين حسابيين لمجتمعين ومعرفة الفرق بينهما ($\mu_1 - \mu_2$) بشرط أن المجتمع الأول يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_1 وتباين σ^2_1 والمجتمع الثانى يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_2 وتباين σ^2_2 .

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 =$ صفر

الفرض البديل H_1 يأخذ أحد ثلاثة أشكال :

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ⟵ اختبار ذو جانب أيمن.

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ ⟵ اختبار ذو جانب أيسر.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

عند تحديداحصائية الاختبار المناسبة لاجراء لاجراء اختبارات الفروض حول متوسطين حسابيين لمجتمعين ومعرفة الفرق بينهما $(\mu_1 - \mu_2)$ يتم التفرقة بين الحالتين الآتيتين:

اذا كان تباين المجتمعين $\sigma^2{}_1$ ، $\sigma^2{}_2$ معلوم **أو**

حجم العينة $(\text{ن}_1) > 30$

حجم العينة $(\text{ن}_2) > 30$

احصائية الاختبار المناسبة فى هذه الحالة هى المتغير العشوائى Z

$$Z = \frac{(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}}}$$

اذا كان تباين المجتمعين $\sigma^2{}_1$ ، $\sigma^2{}_2$ غيرمعلوم **و**

حجم العينة $(\text{ن}_1) < 30$

حجم العينة $(\text{ن}_2) < 30$

احصائية الاختبار المناسبة فى هذه الحالة هى المتغير العشوائى ت حيث:

$$\text{ت} = \frac{(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\text{ع}_{\text{م}}^2 \left(\frac{1}{\text{ن}_1} + \frac{1}{\text{ن}_2}\right)}}$$

حيث:

$$ع^2_م = \frac{ع^2_1\left(ن_1-1\right) + ع^2_2\left(ن_2-1\right)}{ن_1+ن_2-2}$$

حيث:

$\bar{س}_1$ ⟵ الوسط الحسابى للعينة الأولى.

$\bar{س}_2$ ⟵ الوسط الحسابى للعينة الثانية.

μ_1 ⟵ الوسط الحسابى للمجتمع الأول.

μ_2 ⟵ الوسط الحسابى للمجتمع الثانى.

σ^2_1 ⟵ تباين المجتمع الأول.

σ^2_2 ⟵ تباين المجتمع الثانى.

$ن_1$ ⟵ حجم العينة الأولى.

$ن_2$ ⟵ حجم العينة الثانية.

$ع^2_1$ ⟵ تباين العينة الأولى.

$ع^2_2$ ⟵ تباين العينة الثانية.

$ع^2_م$ ⟵ التباين المشترك للعينة الأولى والعينة الثانية.

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم.

5- اتخاذ القرار المناسب ويكون أحد القرارين الآتيين:

(أ) نرفض فرض العدم H_0 اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة الرفض.

(ب) لانرفض فرض العدم H_0 (نقبله) اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة القبول.

مثال (13):

شركة لديها مصنعين الأول فى القاهرة والثانى فى مدينة 6 أكتوبر اخذت عينة من 100 عامل من عمال الانتاج بمصنع القاهرة فوجد أن متوسط الانتاج اليومى للعامل 240 وحدة بانحراف معيارى 20 وحدة ، كما اخذت عينة من 200 عامل من عمال الانتاج بمصنع 6 اكتوبر فوجد ان متوسط الانتاج اليومى للعامل 270 وحدة بانحراف معيارى 40 بدرجة ثقة 90% هل هناك اختلاف بين متوسط انتاجية العامل فى المصنعين؟

الحل

مصنع القاهرة	مصنع 6 أكتوبر
$ن_1 = 100$	$ن_2 = 200$
$\bar{س}_1 = 240$	$\bar{س}_2 = 270$
$ع_1 = 20$	$ع_2 = 40$
$ع_1^2 = 400$	$ع_2^2 = 1600$

معامل الثقة = 90%

مستوى المعنوية α = 1 – معامل الثقة

= 1- 90% = 10%

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 =$ صفر

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

مستوى المعنوية α = 10%

3- تحديد احصائية الاختبارالمناسبة:

نلاحظ ان $\text{ن}_1 = 100 > 30$ ، $\text{ن}_2 = 200 > 30$

∴ احصائية الاختبار المناسبة فى هذه الحالة هى المتغير العشوائى Z حيث:

$$Z = \frac{(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}}}$$

4 – تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$Z = \frac{(240 - 270) - 0}{\sqrt{\frac{400}{100} + \frac{1600}{200}}}$$

$$Z = \frac{-30}{\sqrt{\frac{400}{100} + \frac{1600}{200}}}$$

$$Z = -8.66$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

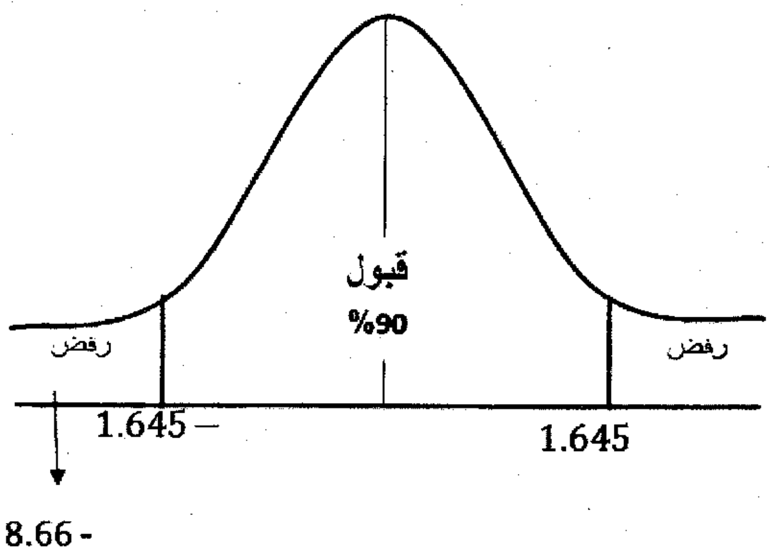
بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

∴ الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة

90% ومستوى معنوية 10% كما يلى :

Z الجدولية = 1.645



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (- 8.66) وقعت فى منطقة الرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن $\mu_1 = \mu_2$.

مثال (14):

للمقارنة بين معدلات الانجاب فى الريف والحضر تم اختيار عينة عشوائية من 100اسرة من سكان الريف فوجد ان متوسط عدد الأطفال فى الأسرة 5.2 طفل بانحراف معيارى 1.2 ، بينما اوضحت عينة من 100 اسرة من سكان الحضر فوجد ان متوسط عدد الاطفال فى الاسرة 4.8 بانحراف معيارى 0.8 فهل تؤيد هذه البيانات صحة الفرض القائل ان معدلات الانجاب فى الريف اكبر من معدلات الانجاب فى الحضر وذلك بمستوى معنوية 5%.

الحل

الريف	الحضر
$ن_1 = 100$	$ن_2 = 100$
$س_1 = 5.2$	$س_2 = 4.8$
$ع_1 = 1.2$	$ع_2 = 0.8$
$ع_1^2 = 1.44$	$ع_2^2 = 0.64$

مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 =$ صفر

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ $\longleftarrow$ اختبار ذو جانب ايمن.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

نلاحظ ان $ن_1 = 100 > 30$ ، $ن_2 = 100 > 30$

∴ احصائية الاختبار المناسبة فى هذه الحالة هى المتغير العشوائى Z حيث:

$$Z = \frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}}}$$

4 – تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$Z = \frac{(5.2 - 4.8) - 0}{\sqrt{\frac{1.44}{100} + \frac{0.64}{100}}}$$

$$Z = \frac{0.4}{\sqrt{\frac{1.44}{100} + \frac{0.64}{100}}}$$

$$Z = 2.77$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

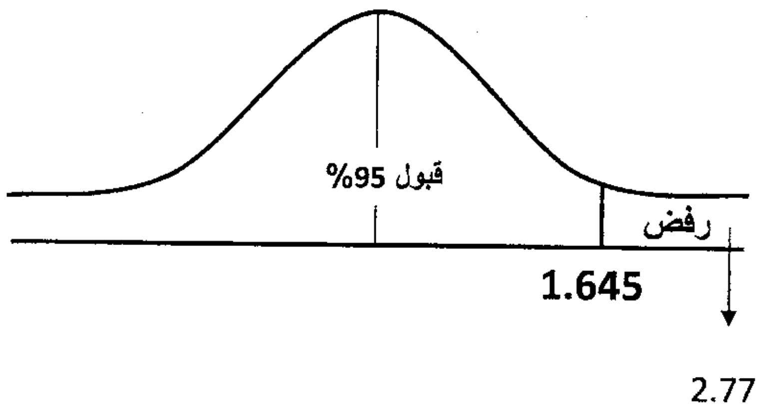
بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu_1 > \mu_2$

∴ الاختبار ذو جانب ايمن

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلى :

Z الجدولية = 1.645

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (2.77) وقعت فى منطقة الرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن $\mu_1 = \mu_2$.

مثال (15):

للمقارنة بين متوسط درجات الطلبة والطالبات فى مادة الاحصاء للفرقة الثالثة فقد تم اخذ عينة من الطلبة وعينة من الطالبات وقد توافرت لديك البيانات التالية:

	حجم العينة	متوسط الدرجات	الانحراف المعيارى
الطلبة	50	16	7
الطالبات	60	15	8

هل هناك فرق جوهرى بين متوسط درجات الطلبة والطالبات بمستوى معنوية 1%.

الحل

الطلبة	الطالبات
$ن_1 = 50$	$ن_2 = 60$
$\bar{س}_1 = 16$	$\bar{س}_2 = 15$
$ع_1 = 7$	$ع_2 = 8$
$ع_1^2 = 49$	$ع_2^2 = 64$

مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 =$ صفر

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

نلاحظ ان $ن_1 = 50 > 30$ ، $ن_2 = 60 > 30$

∴ احصائية الاختبار المناسبة فى هذه الحالة هى المتغير العشوائى Z حيث:

$$Z = \frac{(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}}}$$

4 – تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$Z = \frac{(16-15) - 0}{\sqrt{\frac{49}{50} + \frac{64}{60}}}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{49}{50} + \frac{64}{60}}}$$

$Z = 0.699$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

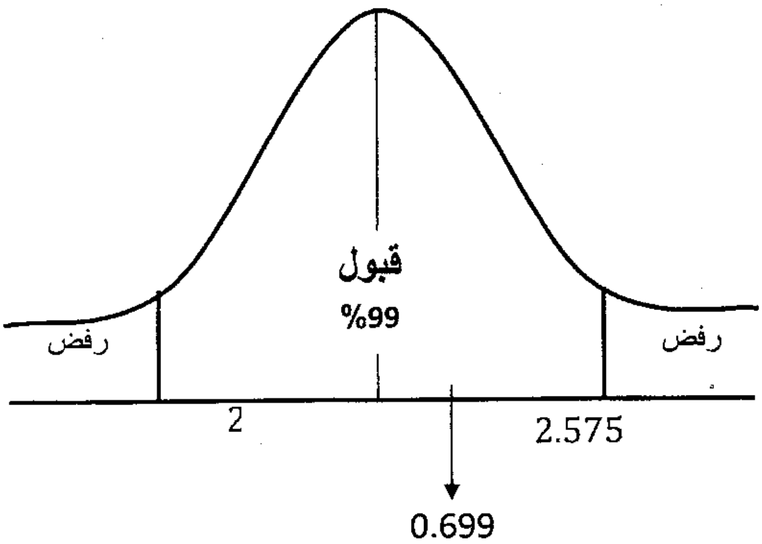
بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

∴ الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 99% ومستوى معنوية 1% كما يلى :

Z الجدولية = 2.575

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (0.699) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن $\mu_1 = \mu_2$.

مثال (16):

يوجد بأحد المصانع آلتين لتعبئة المواد الغذائية وباختيار عينة عشوائية من 10 عبوات من انتاج الآلة الأولى وجد أن متوسط وزن العبوة 201 جرام وانحراف معيارى 15 جرام بينما اوضحت عينة عشوائية من 5 عبوات من انتاج الآلة الثانية أن متوسط وزن العبوة 205 جرام وانحراف معيارى 12 جرام بمستوى معنوية 5% اختبر تساوى متوسط وزن العبوة فى الآلتين.

الحل

الآلة الأولى

$ن_1 = 10$

$\bar{س}_1 = 201$

$ع_1 = 15$

$ع_1^2 = 225$

الآلة الثانية

$ن_2 = 5$

$\bar{س}_2 = 205$

$ع_2 = 12$

$ع_2^2 = 144$

مستوى المعنوية α = 5%

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 =$ صفر

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

مستوى المعنوية α = 5%

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

نلاحظ ان $ن_1 = 10 < 30$ ، $ن_2 = 5 < 30$

. احصائية الاختبار المناسبة فى هذه الحالة هى المتغير العشوائى ت حيث:

$$ت = \frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{ع_م^2 \left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}\right)}}$$

حيث:

$$ع_م^2 = \frac{ع_1^2\,(ن_1-1) + ع_2^2\,(ن_2-1)}{ن_1+ن_2-2}$$

$$ع_م^2 = \frac{225\,(10-1) + 144\,(5-1)}{10+5-2}$$

$$ع_م^2 = \frac{225 \times 9 + 144 \times 4}{13}$$

$$\therefore ع_م^2 = 200.08$$

تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$ت = \frac{(201-205) - 0}{\sqrt{\frac{200.08}{10} + \frac{200.08}{5}}}$$

$$ت = \frac{-4}{\sqrt{\frac{200.08}{10} + \frac{200.08}{5}}}$$

$$ت = -.52$$

5- تحديد منطقة القبول أوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

∴ الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة ت الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلى :

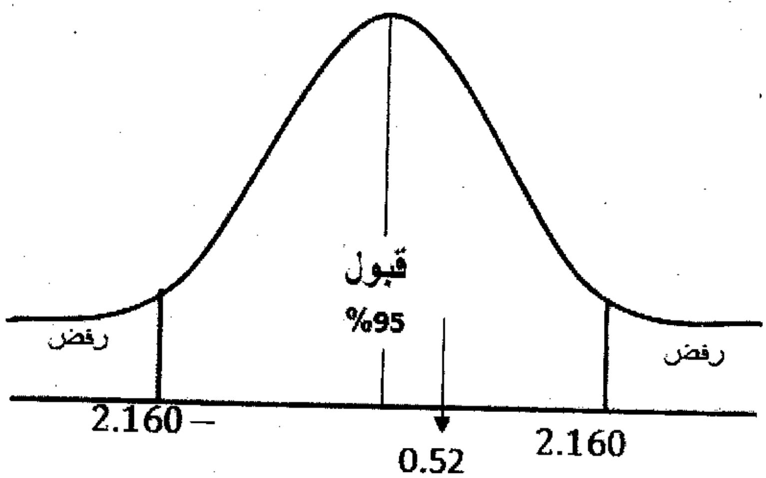
يتم الكشف عن ت الجدولية امام الصف = درجات الحرية = $ن_1 + ن_2 - 2$

$= 10 + 5 - 2 = 13$

وتحت العمود = $\frac{\alpha}{2} = \frac{.05}{2} = 0.025$

نجد أن $ت_{13 ، 0.025} = 2.160$

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (0.52) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن $\mu_1 = \mu_2$.

مثال (17):

فى احدى الدراسات لقياس متوسط درجة ذكاء الطالب تم أخذ عينة عشوائية من 10 طلاب من كلية الآداب فوجد ان متوسط درجة ذكاء الطالب فى العينة 85 درجة بانحراف معيارى 15 درجة ، وتم أخذ عينة عشوائية اخرى من 15 طالب من طلاب كلية الحقوق فوجد أن متوسط درجة ذكاء الطالب فى العينة 75 درجة بانحراف معيارى 10 درجات بمستوى معنوية 10% هل تعتقد ان هناك فرقا جوهريا بين متوسطى درجة الذكاء فى الكليتين ؟

الحل

كلية الآداب	كلية الحقوق
$ن_1 = 10$	$ن_2 = 15$
$\bar{س}_1 = 85$	$\bar{س}_2 = 75$
$ع_1 = 15$	$ع_2 = 10$
$ع_1^2 = 225$	$ع_2^2 = 100$

مستوى المعنوية $\alpha = 10\%$

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 =$ صفر

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

مستوى المعنوية $\alpha = 10\%$

3- تحديد احصائية الاختبارالمناسبة:

نلاحظ ان $ن_1 = 10 < 30$ ، $ن_2 = 5 < 30$

∴ احصائية الاختبار المناسبة فى هذه الحالة هى المتغير العشوائى ت حيث:

$$ت = \frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{ع_م^2 \left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}\right)}}$$

حيث:

$$ع_م^2 = \frac{ع_1^2\,(ن_1 - 1) + ع_2^2\,(ن_2 - 1)}{ن_1 + ن_2 - 2}$$

$$ع_م^2 = \frac{225\,(10 - 1) + 100\,(15 - 1)}{10 + 15 - 2}$$

$$ع_م^2 = \frac{225 \times 9 + 100 \times 14}{23}$$

$$\therefore ع_م^2 = 148.9$$

تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$ت = \frac{(75-85) - 0}{\sqrt{\frac{148.9}{10} + \frac{148.9}{15}}}$$

$$ت = \frac{10}{\sqrt{\frac{148.9}{10} + \frac{148.9}{15}}}$$

ت = 2.01

5- تحديد منطقة القبول أوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

∴ الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة ت الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 90% ومستوى معنوية 10% كما يلى :

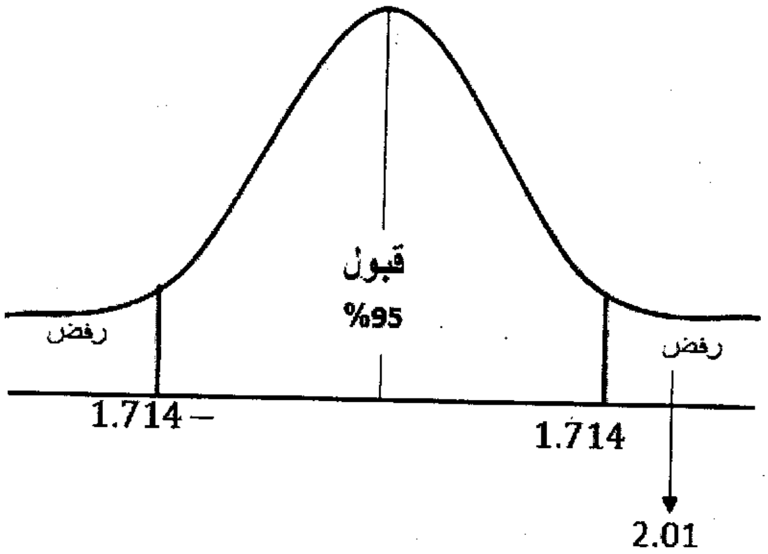
يتم الكشف عن ت الجدولية امام الصف = درجات الحرية = ن$_1$ + ن$_2$ - 2

= 10 + 15 – 2 = 23

وتحت العمود = $\frac{\alpha}{2} = \frac{.10}{2} = 0.05$

نجد أن ت $_{23 ، 0.05}$ = 1.714

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (2.01) وقعت فى منطقة الرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن $\mu_1 = \mu_2$.

خامسا: اختبارات الفروض للفرق بين نسبتين:

نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية كبيرة حجمها ن$_1$ من مجتمع نسبة حدوث ظاهرة معينة فيه ق$_1$ ونفرض أننا سحبنا عينة عشوائية أخرى كبيرة حجمها ن$_2$ من مجتمع آخر نسبة حدوث نفس الظاهرة فيه ق$_2$ فاذاكانت نسبة حدوث الظاهرة فى العينة الأولى قَ$_1$ ونسبة حدوث الظاهرة فى العينة الثانية قَ$_2$ فإن المتغير العشوائى

(قَ$_1$ – قَ$_2$) يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط قدره μ = ق$_1$ – ق$_2$ ، تباين σ^2 يساوى

$$\frac{\text{ق}_1\,(1-\text{ق}_1)}{\text{ن}_1}+\frac{\text{ق}_2\,(1-\text{ق}_2)}{\text{ن}_2}$$

وعلى نجد أن المتغير العشوائى Z يأخذ الشكل التالى :

$$Z = \frac{(\acute{\text{ق}}_1 - \acute{\text{ق}}_2) - (\text{ق}_1 - \text{ق}_2)}{\sqrt{\frac{\text{ق}_\text{م}\left(1 - \text{ق}_\text{م}\right)}{\text{ن}_1} + \frac{\text{ق}_\text{م}\left(1 - \text{ق}_\text{م}\right)}{\text{ن}_2}}}$$

حيث :

$$\text{ق}_\text{م} = \frac{\text{ن}_1 \times \acute{\text{ق}}_1 + \text{ن}_2 \times \acute{\text{ق}}_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}$$

والمتغير العشوائى Z سيتوزع توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعى المعيارى.

واذا أردنا اجراء اختبارات الفروض حول الفرق بين نسبتين لمجتمعين مختلفين تكون خطوات الاختبار كما يلى.

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

H_0 : $\text{ق}_1 = \text{ق}_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

H_0 : $\text{ق}_1 - \text{ق}_2 =$ صفر

الفرض البديل H_1 يأخذ أحد ثلاثة أشكال :

H_1 : $\text{ق}_1 \neq \text{ق}_2$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

H_1 : $\text{ق}_1 > \text{ق}_2$ ⟵ اختبار ذو جانب أيمن.

H_1 : $\text{ق}_1 < \text{ق}_2$ ⟵ اختبار ذو جانب أيسر.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة عند اجراء اختبارات الفروض حول الفرق بين نسبتين لمجتمعين مختلفين هى المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى Z حيث:

$$Z = \frac{(\bar{ق}_1 - \bar{ق}_2) - (ق_1 - ق_2)}{\sqrt{\frac{ق_م\left(1 - ق_م\right)}{ن_1} + \frac{ق_م\left(1 - ق_م\right)}{ن_2}}}$$

حيث :

$$ق_م = \frac{ن_1 \; X \; \bar{ق}_1 + ن_2 \; X \; \bar{ق}_2}{ن_1 + ن_2}$$

حيث:

$\bar{ق}_1$ ⟵ نسبة الصفة فى العينة الأولى.

$\bar{ق}_2$ ⟵ نسبة الصفة فى العينة الثانية.

$ق_1$ ⟵ نسبة الصفة فى المجتمع الأول.

$ق_2$ ⟵ نسبة الصفة فى المجتمع الثانى.

$ن_1$ ⟵ حجم العينة الأولى.

$ن_2$ ⟵ حجم العينة الثانية.

q_m ⟵ النسبة المشتركة للعينة الأولى والعينة الثانية.

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم.

5- اتخاذ القرار المناسب ويكون أحد القرارين الآتيين:

(أ) نرفض فرض العدم H_0 اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة الرفض.

(ب) لانرفض فرض العدم H_0 (نقبله) اذا وقعت القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار فى منطقة القبول.

مثال (18):

للمقارنة بين نوعين من السيارات من من حيث الحاجة لاصلاحات رئيسية تم اختيار عينتين عشوائيتين الأولى مكونة من 400 مالك للنوع الأول والثانية مكونة من 500 مالك للنوع الثانى فكان عدد الملاك الذين تحتاج سياراتهم لاصلاحات رئيسية فى العينة الأولى 53 بينما كان عددهم فى العينة الثانية 78 مالك ، اختبر فرض العدم بعدم وجود فرق بين النسبتين بمستوى معنوية 10%.

الحل

النوع الأول

ن$_1$ = 400

عدد الذين تحتاج سياراتهم = 53

لاصلاحات رئيسية

النسبة فى العينة الأولى = $\frac{53}{400}$

$\bar{ق}_1$ = 0.1325

النوع الثانى

ن$_2$ = 500

عدد الذين تحتاج سياراتهم = 78

لاصلاحات رئيسية

النسبة فى العينة الثانية = $\frac{78}{500}$

$\bar{ق}_2$ = 0.156

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

H_0 : ق$_1$ = ق$_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

H_0 : ق$_1$- ق$_2$ = صفر

H_1 : ق$_1$ ≠ ق$_2$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

2- تحديد مستوى المعنوية α:

مستوى المعنوية α = 10%

3- تحديد احصائية الاختبارالمناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة عند اجراء اختبارات الفروض حول الفرق بين نسبتين لمجتمعين مختلفين هى المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى Z حيث:

$$Z = \frac{\left(\acute{\text{ق}}_1 - \acute{\text{ق}}_2\right) - \left(\text{ق}1 - \text{ق}2\right)}{\sqrt{\frac{\text{ق}_\text{م}\left(1 - \text{ق}_\text{م}\right)}{\text{ن}1} + \frac{\text{ق}_\text{م}\left(1 - \text{ق}_\text{م}\right)}{\text{ن}2}}}$$

حيث :

$$\text{ق}_\text{م} = \frac{\acute{\text{ق}}_1 \, X \, \text{ن}1 + \acute{\text{ق}}_2 \, X \, \text{ن}2}{\text{ن}1 + \text{ن}2}$$

$$\text{ق}_\text{م} = \frac{0.156 \, X \, 500 + .1325 \, X \, 400}{500 + 400}$$

$$= 0.146$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة:

$$Z = \frac{0 - (0.156 - 0.1325)}{\sqrt{\frac{(0.146-1)\,0.146}{500} + \frac{(0.146-1)\,0.146}{400}}}$$

$$Z = \frac{0.0235-}{\sqrt{\frac{0.854 X 0.146}{500} + \frac{0.854 X 0.146}{400}}}$$

$$Z = \frac{0.0235-}{\sqrt{0.00025 + 0.0003}}$$

$$Z = \frac{-0.0235}{\sqrt{0.00055}}$$

$$Z = \frac{-0.0235}{0.0235} = -1$$

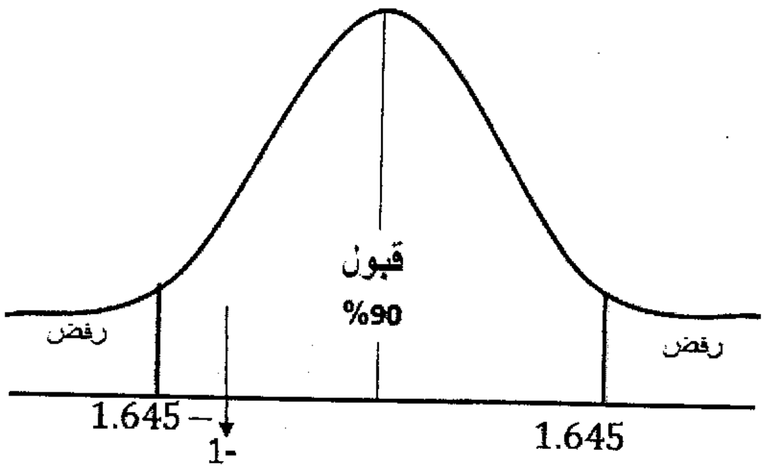
5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $ق_1 \neq ق_2$

∴ الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 90% ومستوى معنوية 10% كما يلى :

Z الجدولية = 1.645



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (- 1) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن $ق_1 = ق_2$.

مثال (19):

فى أحد البحوث التسويقية لمعرفة مدى تفضيل المستهلكين لمنتج جديد تم طرحه فى الأسواق تم اخذ عينتين عشوائيتين من منطقتين مختلفتين حيث كان حجم العينة فى المنطقة الأولى = 400 ، وحجم العينة فى المنطقة الثانية = 300 واتضح من العينة الأولى ان عدد الذين يفضلون المنتج = 220 ، ومن العينة الثانية عدد الذين يفضلون المنتج = 195 بمستوى معنوية 5% هل هناك اختلاف معنوى فى نسبة تفضيل المنتج بين المنطقتين.

الحل

المنطقة الأولى	المنطقة الثانية
$ن_1 = 400$	$ن_2 = 300$
عدد الذين يفضلون المنتج = 220	عدد الذين يفضلون المنتج = 195
النسبة فى العينة الأولى = $\frac{220}{400}$	النسبة فى العينة الثانية = $\frac{195}{300}$
$\bar{ق}_1 = 0.55$	$\bar{ق}_2 = 0.65$

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

H_0 : $ق_1 = ق_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

H_0 : $ق_1 - ق_2 =$ صفر

H_1 : $ق_1 \neq ق_2$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

2- تحديد مستوى المعنوية α:

مستوى المعنوية α = 5%

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة عند اجراء اختبارات الفروض حول الفرق بين نسبتين لمجتمعين مختلفين هى المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى Z حيث:

$$Z = \frac{(\acute{ق}_1 - \acute{ق}_2) - (ق_1 - ق_2)}{\sqrt{\frac{ق_م\left(1 - ق_م\right)}{ن_1} + \frac{ق_م\left(1 - ق_م\right)}{ن_2}}}$$

حيث :

$$ق_م = \frac{ن_1 \; X \; \acute{ق}_1 + ن_2 \; X \; \acute{ق}_2}{ن_1 + ن_2}$$

$$ق_م = \frac{0.65 \; X \; 300 + 0.55 \; X \; 400}{300 + 400}$$

$$= 0.593$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة:

$$Z = \frac{0 - (0.65 - 0.55)}{\sqrt{\frac{(0.592-1)\,0.592}{300} + \frac{(0.593-1)\,0.592}{400}}}$$

$$Z = \frac{0.10-}{\sqrt{\frac{0.407\,X\,0.593}{300} + \frac{0.407\,X\,0.592}{400}}}$$

$$Z = \frac{0.10-}{\sqrt{0.0008+0.0006}}$$

$$Z = \frac{0.10-}{\sqrt{0.0014}}$$

$$Z = \frac{0.10-}{0.0374} = -2.67$$

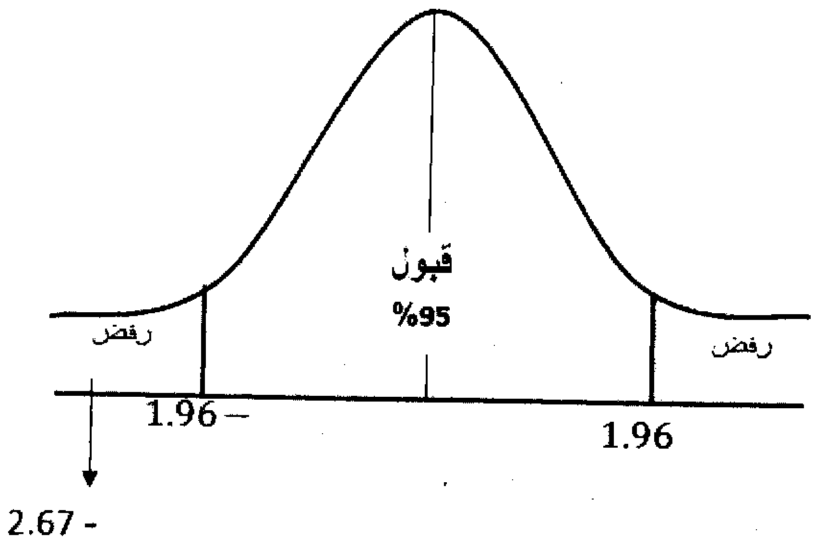
5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $ق_1 \neq ق_2$

∴ الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلى :

Z الجدولية = 1.96



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (- 2.67) وقعت فى منطقة الرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن $ق_1 = ق_2$.

مثال (20):

مجموعتان تتكون كل منهما من 500 مريض مصابين بمرض معين وقد تم اعطاء دواء معين للمجموعة الأولى ولم يعطى للمجموعة الثانية ، فتماثل 400 مريض للشفاء من المجموعة الأولى بينما تماثل 300 مريض للشفاء فى المجموعة الثانية ، هل ترى أن هذا الدواء يساعد على سرعة الشفاء بمستوى معنوية 1%.

الحل

المجموعة الأولى

$ن_1$ = 500

عدد الذين تماثلوا للشفاء = 400

النسبة فى العينة الأولى = $\frac{400}{500}$

$\bar{ق}_1$ = 0.8

المجموعة الثانية

$ن_2$ = 500

عدد الذين تماثلوا للشفاء = 300

النسبة فى العينة الثانية = $\frac{300}{500}$

$\bar{ق}_2$ = 0.6

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

H_0 : $ق_1 = ق_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

H_0 : $ق_1 - ق_2$ = صفر

H_1 : $ق_1 > ق_2$ ⟵ اختبار ذو جانب أيمن.

2- تحديد مستوى المعنوية α:

مستوى المعنوية α = 1%

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة عند اجراء اختبارات الفروض حول الفرق بين نسبتين لمجتمعين مختلفين هى المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى Z حيث:

$$Z = \frac{(\text{ق}_1-\text{ق}_2) - (\acute{\text{ق}}_1 - \acute{\text{ق}}_2)}{\sqrt{\dfrac{\text{ق}_م\left(1-\text{ق}_م\right)}{\text{ن}_1} + \dfrac{\text{ق}_م\left(1-\text{ق}_م\right)}{\text{ن}_2}}}$$

حيث :

$$\text{ق}_م = \frac{\acute{\text{ق}}_1 \, X \, \text{ن}_1 + \acute{\text{ق}}_2 \, X \, \text{ن}_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}$$

$$\text{ق}_م = \frac{0.6 \, X \, 500 + 0.8 \, X \, 500}{500 + 500}$$

$$= 0.7$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة:

$$Z = \frac{0 - (0.6 - 0.8)}{\sqrt{\dfrac{(0.7-1)\,0.7}{500} + \dfrac{(0.7-1)\,0.7}{500}}}$$

$$Z = \frac{0.2}{\sqrt{\dfrac{0.3 X 0.7}{500} + \dfrac{0.3 X 0.7}{500}}}$$

$$Z = \frac{0.2}{\sqrt{0.00042 + 0.00042}}$$

$$Z = \frac{0.2}{\sqrt{0.00084}}$$

$$Z = \frac{0.2}{0.0289} = 6.9$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

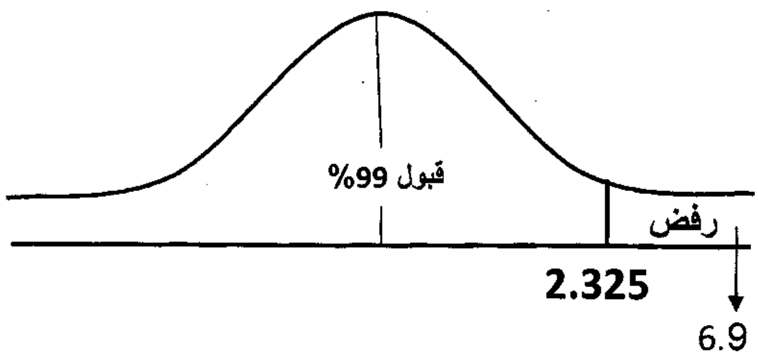
بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : ق$_1$ > ق$_2$

∴ الاختبار ذو جانب أيمن

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 99% ومستوى معنوية 1% كما يلى :

Z الجدولية = 2.325

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (6.9) وقعت فى منطقة االرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن ق$_1$ = ق$_2$.

مثال (21):

يرى أحد علماء النفس ان نسبة الوفيات بسبب الإدمان فى القاهرة **أقل من** النسبة المثيلة فى الاسكندرية ولاختبار ذلك الرأى فقد اخذ عينة عشوائية من القاهرة والاسكندرية حجم كل منها 120 حالة فوجد أن عدد حالات الوفيات بسبب الادمان فى القاهرة 12 حالة وفى الاسكندرية 18 حالة ، اختبر صحة رأى هذا العالم بمستوى معنوية 5%.

الحل

الاسكندرية	القاهرة
$ن_2 = 120$	$ن_1 = 120$
عدد الوفيات = 18	عدد الوفيات = 12
النسبة فى العينة الثانية = $\frac{18}{120}$	النسبة فى العينة الأولى = $\frac{12}{120}$
$\bar{ق}_2 = 0.15$	$\bar{ق}_1 = 0.1$

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

H_0 : $ق_1 = ق_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

H_0 : $ق_1 - ق_2 =$ صفر

H_1 : $ق_1 < ق_2$ ⟵ اختبار ذو جانب ايسر.

2- تحديد مستوى المعنوية α:

مستوى المعنوية α = 5%

3- تحديد احصائية الاختبارالمناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة عند اجراء اختبارات الفروض حول الفرق بين نسبتين لمجتمعين مختلفين هى المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى Z حيث:

$$Z = \frac{(\acute{ق}_1 - \acute{ق}_2) - (ق1 - ق2)}{\sqrt{\frac{ق_م\left(1 - ق_م\right)}{ن1} + \frac{ق_م\left(1 - ق_م\right)}{ن2}}}$$

حيث :

$$ق_م = \frac{\acute{ق}_1 \; X \; ن^1 + \acute{ق}_2 \; X \; ن^2}{ن^1 + ن^2}$$

$$ق_م = \frac{0.15\,X120 + 0.1\,X120}{120 + 120}$$

$$= 0.125$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة:

$$Z = \frac{0 - (0.15 - 0.1)}{\sqrt{\frac{(0.125-1)\,0.125}{120} + \frac{(0.125-1)\,0.125}{120}}}$$

$$Z = \frac{0.05-}{\sqrt{\frac{0.875 X 0.125}{120} + \frac{0.875 X 0.125}{120}}}$$

$$Z = \frac{0.05-}{\sqrt{0.00091+0.00091}}$$

$$Z = \frac{0.05-}{\sqrt{0.00182}}$$

$$Z = \frac{0.05-}{0.043} = -1.16$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

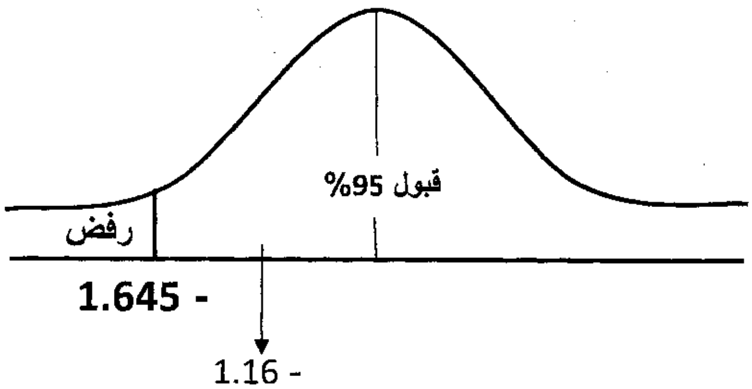
بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : ق$_1$ < ق$_2$

∴ الاختبار ذو جانب أيسر

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلى :

Z الجدولية = 1.645

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (-1.16) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن $ق_1 = ق_2$.

أمثلة متنوعة

مثال (1):

اذا كان متوسط وزن العبوة من احدى السلع الغذائية هو 200 جرام فاذا تم سحب عينة عشوائية مكونة من 25 عبوة من الدفعة الانتاجية الأخيرة فوجد أن متوسط وزن العبوة بالعينة 210 جرام بانحراف معيارى 40 جرام هل تقبل الفرض بأن متوسط وزن العبوة بالدفعة الانتاجية الأخيرة قد **ارتفع عن** المتوسط المخطط له وذلك باستخدام مستوى معنوية 10%.

الحل

ن = 25 > 30 　　　 $\overline{س}$ = 210

ع = 40 　　　 μ = 200

مستوى المعنوية α = 10%

معامل الثقة = 1 – α = 1- 10% = 90%

خطوات الاختبار:

1- تحديد الفرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : $\mu = 200$

الفرض البديل H_1 : $\mu > 200$

2- تحديد مستوى المعنوية α :

α = 10%

3- تحديد احصائية الاختبار :

نلاحظ من البيانات السابقة أن الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معلوم وحجم العينة ن = $25 < 30$

∴ احصائية الاختبار المناسبة هى المتغير العشوائى ت والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$ت = \frac{(\bar{س} - \mu)}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

4 – تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$ت = \frac{(200-210)}{\frac{40}{\sqrt{25}}}$$

$$∴ ت = \frac{10}{\frac{40}{5}}$$

$$∴ ت = 1.25$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل $H_1 : \mu > 200$

∴ الاختبار ذو جانب أيمن

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة ت الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 90% ومستوى معنوية 10% كما يلى :

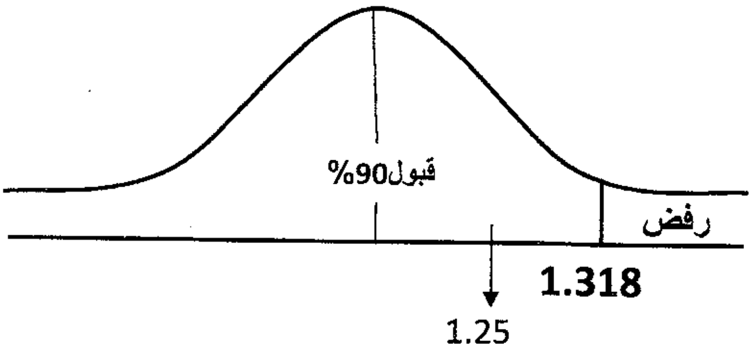
يتم الكشف عن ت الجدولية امام الصف = درجات الحرية = ن – 1

= 25 – 1= 24

وتحت العمود = α= 0.10

نجد أن ت $_{24 \text{،} 0.10}$ = 1.318

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (1.25) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن μ = 200.

من خلال الاختبار السابق يمكن القول متوسط وزن العبوة بالدفعة الانتاجية الأخيرة لم يرتفع عن المتوسط المخطط له.

مثال (2):

أخذت عينتان من أكياس مواد غذائية تمت تعبئتها فى ورديتين متتاليتين فوجد أن متوسط الوزن فى العينة الأولى البالغ عددها 8 أكياس هو 1.05 كجم بانحراف معيارى 0.08 كجم ، كما وجد أن متوسط الوزن للعينة الثانية البالغ عددها أيضا 8 أكياس هو 0.95 كجم بانحراف معيارى 0.04 كجم هل هناك اختلاف معنوى بين متوسط الوزن فى الورديتين وذلك باستخدام مستوى معنوية 1%.

الحل

الوردية الأولى	الوردية الثانية
$ن_1 = 8$	$ن_2 = 8$
$\bar{س}_1 = 1.05$	$\bar{س}_2 = 0.95$
$ع_1 = 0.08$	$ع_2 = 0.04$
$ع_1^2 = 0.0064$	$ع_2^2 = 0.0016$

معامل الثقة = 99%

مستوى المعنوية α = 1 – معامل الثقة

= 1- 99% = 1%

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 =$ صفر

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ⟵ اختبار ذو جانبين.

2- تحديد مستوى المعنوية α.

مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$

نلاحظ ان $ن_1 = 8 < 30$ ، $ن_2 = 8 < 30$

∴ احصائية الاختبار المناسبة فى هذه الحالة هى المتغير العشوائى ت حيث:

$$ت = \frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{ع_م^2 \left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}\right)}}$$

حيث:

$$ع_م^2 = \frac{ع_1^2\,(ن_1 - 1) + ع_2^2\,(ن_2 - 1)}{ن_1 + ن_2 - 2}$$

$$ع_م^2 = \frac{0.0064\,(8 - 1) + 0.0016\,(8 - 1)}{8 + 8 - 2}$$

$$ع_م^2 = \frac{0.0064 \times 7 + 0.0016 \times 7}{14}$$

∴ $ع_م^2 = 0.004$

تحديد القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة :

$$ت = \frac{0-(0.95-1.05)}{\sqrt{\frac{0.004}{8}+\frac{0.004}{8}}}$$

$$ت = \frac{0.10}{\sqrt{0.001}}$$

ت = 3.16

5- تحديد منطقة القبول أوالرفض واتخاذ القرار:

بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

∴ الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة ت الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 99% ومستوى معنوية 1% كما يلى :

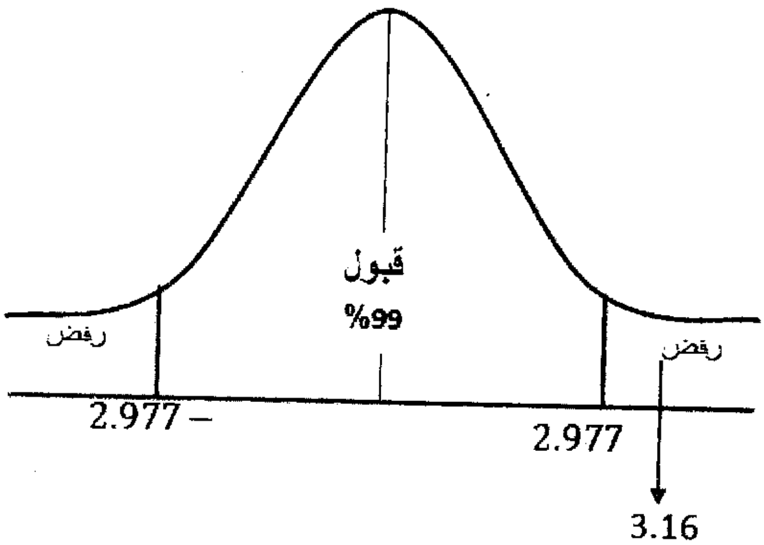
يتم الكشف عن ت الجدولية امام الصف = درجات الحرية = ن$_1$ + ن$_2$ - 2

= 8 + 8 – 2 = 14

وتحت العمود = $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005$

نجد أن ت $_{14 ، 0.005}$ = 2.977

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلى:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (3.16) وقعت فى منطقة الرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن $\mu_1 = \mu_2$.

مثال (3):

تدعى شركة أدوية ان 80% من مستخدمى عقار معين يتماثلون للشفاء فاذا تم اخذ عينة عشوائية من 120 مريض وتم تتبع حالتهم الصحية بعد تعاطى العقار فوجد أن 30 مريض مازالوا يعانون من المرض بمستوى معنوية 5% هل نقبل ادعاء الشركة عن مدى كفاءة العقار.

الحل

ن = 120 عدد الذين تماثلوا للشفاء = 120- 30 = 90

النسبة فى العينة (قَ) = $\frac{90}{120}$ = 0.75

النسبة فى المجتمع (ق) = 0.80

مستوى المعنوية α = 5%

خطوات الاختبار:

1- فرض العدم والفرض البديل :

فرض العدم H_0 : ق = 0.80

الفرض البديل H_1 : ق ≠ 0.80

2- تحديد مستوى المعنوية :

α = 5%

3- تحديد احصائية الاختبارالمناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة لاجراء اختبار حول النسبة فى المجتمع هى المتغير العشوائى Z والذى يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى حيث :

$$Z = \frac{\acute{\text{ق}} - \text{ق}}{\sqrt{\frac{\text{ق}\,(1 - \text{ق})}{\text{ن}}}}$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار ، أى حساب قيمة احصائية الاختبار من واقع البيانات المشاهدة المتحصل عليها من العينة وذلك بافتراض صحة الفرض العدم:

$$Z = \frac{.80 - .75}{\sqrt{\frac{.80(1-.80)}{120}}}$$

$$Z = \frac{-.05}{\sqrt{\frac{.20 \times 0.80}{120}}}$$

∴ $Z = -1.37$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

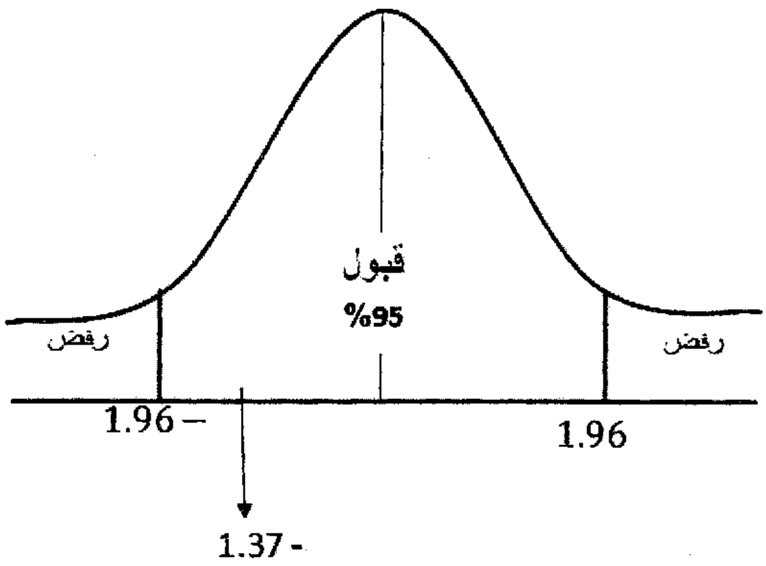
بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : ق ≠ 0.80

∴ الاختبار ذو جانبين

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95%

ومستوى معنوية 5% كما يلى :

Z الجدولية = 1.96



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (-1.37) وقعت فى منطقة القبول .

∴ نقبل فرض العدم بأن ق = 0.80.

مثال (4):

سحبت عينتان حجم كل منهما 500 شخص من مدينتين أ ، ب فوجد أن نسبة المدخنين فى العينتين 0.4 ، 0.3 على الترتيب اختبر الفرض القائل بأن نسبة المدخنين بالمدينة أ مساوية **على الأقل** لنسبة المدخنين فى المدينة ب بمستوى معنوية %5.

الحل

المدينة أ	المدينة ب
$\text{ن}_1 = 500$	$\text{ن}_2 = 500$
النسبة فى العينة الأولى = 0.4	النسبة فى العينة الثانية = 0.3
$\bar{\text{ق}}_1$	$\bar{\text{ق}}_2$

خطوات الاختبار:

1- الفرض العدم والفرض البديل :

H_0 : $\text{ق}_1 = \text{ق}_2$ كما يمكن كتابة فرض العدم بالشكل التالى:

H_0 : $\text{ق}_1 - \text{ق}_2$ = صفر

H_1 : $\text{ق}_1 \geq \text{ق}_2$ ← اختبار ذو جانب أيمن.

2- تحديد مستوى المعنوية α:

مستوى المعنوية α = 5%

3- تحديد احصائية الاختبار المناسبة:

احصائية الاختبار المناسبة عند اجراء اختبارات الفروض حول الفرق بين نسبتين لمجتمعين مختلفين هى المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى Z حيث:

$$Z = \frac{\left(\acute{\text{ق}}_{1} - \acute{\text{ق}}_{2}\right) - \left(\text{ق}1 - \text{ق}2\right)}{\sqrt{\frac{\text{ق}_{\text{م}}\left(1 - \text{ق}_{\text{م}}\right)}{\text{ن}1} + \frac{\text{ق}_{\text{م}}\left(1 - \text{ق}_{\text{م}}\right)}{\text{ن}2}}}$$

حيث :

$$\text{ق}_{\text{م}} = \frac{\acute{\text{ق}}_{1} \; X \; \text{ن}1 + \acute{\text{ق}}_{2} \; X \; \text{ن}2}{\text{ن}1 + \text{ن}2}$$

$$\text{ق}_{\text{م}} = \frac{0.3 \; X \; 500 + 0.4 \; X \; 500}{500 + 500}$$

$$= 0.35$$

4- حساب القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار من واقع بيانات العينة:

$$Z = \frac{0 - (0.3 - 0.4)}{\sqrt{\frac{(0.35-1)\,0.35}{500} + \frac{(0.35-1)\,0.35}{500}}}$$

$$Z = \frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.65 X 0.35}{500} + \frac{0.65 X 0.35}{500}}}$$

$$Z = \frac{0.1}{\sqrt{0.000455 + 0.000455}}$$

$$Z = \frac{0.1}{\sqrt{0.00091}}$$

$$Z = \frac{0.1}{0.03} = 3.33$$

5- تحديد منطقة القبول اوالرفض واتخاذ القرار:

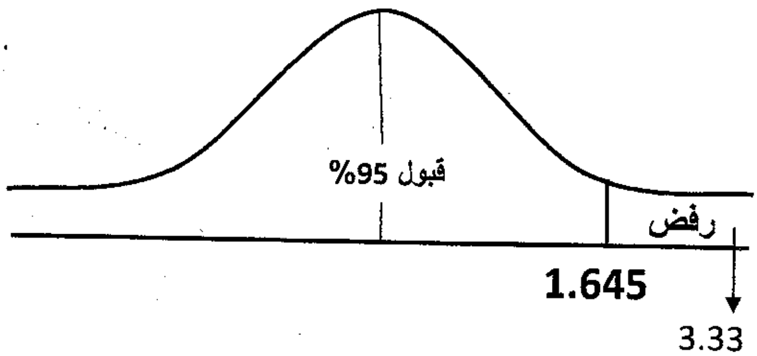
بما أن الفرض البديل الفرض البديل H_1 : $ق_1 > ق_2$

∴ الاختبار ذو جانب أيمن

وتتحدد منطقة القبول أو الرفض بناء على قيمة Z الجدولية المقابلة لمعامل ثقة 95% ومستوى معنوية 5% كما يلي :

Z الجدولية = 1.645

وعلى ذلك فان منطقة القبول أو الرفض تتحدد كما يلي:



وحيث أن القيمة المشاهدة لاحصائية الاختبار (3.33) وقعت فى منطقة االرفض .

∴ نرفض فرض العدم بأن $ق_1 = ق_2$.

تمارين

(1) عرف باختصار كل من :

الفرض – الخطأ من النوع الأول – الخطأ من النوع الثانى – المنطقة الحرجة – منطقة القبول أو الرفض – احصائية الاختبار – مستوى المعنوية.

(2) اشرح خطوات اجراء الاختبارات الاحصائية

(3) يدعى أحد الباحثين أن متوسط عدد العاملين المصريين فى الشركات الأجنبية فى مصر 1500 عامل بانحراف معيارى قدره 70 وبسحب عينة عشوائية قدرها 120 شركة من الشركات الأجنبية وجد أن متوسط عدد العاملين المصريين فيها 1700عامل المطلوب اختبار الادعاء السابق عند مستوى معنوية 5%.

(4) قام أحد الباحثين بدراسة متوسط الأجور للموظفين بإحدى الشركات وقد قام بسحب عينة من 196 موظف فوجد أن متوسط الأجور فى العينة 2500 جنيه فاذا علمت أن الانحراف المعيارى للأجور فى الشركة هو 150 جنيه المطلوب اختبار الفرض بأن متوسط الأجور للموظفين بالشركة **أكبر من** 3000 جنيه بمستوى معنوية 1%.

(5) فى دراسة قام بها أحد الباحثين لمتوسط وزن العبوة فى احدى شركات المواد الغذائية المحفوظة فقد تم أخذ عينة من 150 عبوة فوجد أن متوسط وزن العبوة 520 جرام بانحراف معيارى قدره 40 جرام المطلوب اختبار الفرض بأن متوسط وزن العبوة فى الشركة **يزيد عن** 500 جرام وذلك بمستوى معنوية 10%.

(6) لدراسة متوسط أطوال الطلبة فى كلية التجارة فقد تم أخذ عينة حجمها 144 طالب فوجد أن متوسط طول الطالب 175 سنتيمتربانحراف معيارى قدره 20 سنتيمتر المطلوب اختبار الفرض القائل بأن متوسط طول الطالب فى كلية التجارة **يختلف عن** 170 سنتيمتر بمستوى معنوية 5%.

(7) يدعى أحد مندوبى المبيعات أن متوسط مبيعاته اليومية 10000 جنيه وللتحقق من صحة هذا الادعاء فقد تم اختيار عينة من 20 يوم فوجد أن متوسط المبيعات فى العينة 12000 جنيه بانحراف معيارى 1200 جنية والمطلوب اختبار صحة هذا الادعاء بمستوى معنوية 5% .

(8) اذا كان متوسط الربح لسهم معين فى العام الماضى هو 7 جنيه وهناك اعتقاد سائد أن الربح **سيرتفع** هذا العام وللتحقق من ذلك فقد تم استطلاع راى مجموعة من خبراء المال حول متوسط الربح فوجد انه 5 ، 7.5 ، 8 ، 7 ، 6.5 ، 8 هل ترى أن الاعتقاد السابق صحيح بمستوى معنوية 1%.

(9) يدعى مراجع بأحد محلات السوبر ماركت المشهورة أن متوسط عدد الأخطاء له من خلال مراجعة الفواتير **لايزيد عن** 8 أخطاء وباختيار عينة عشوائية مكونة من 20 فاتورة تبين ان متوسط عدد الأخطاء بالعينة 10 أخطاء بانحراف معيارى قدره 3 والمطلوب التحقق من صحة هذا الادعاء بمستوى معنوية 5%.

(10) سحبت عينة عشوائية من احد مصانع انتاج المصابيح الكهربائية تحتوى على 100 مصباح ووجد فيها 4 مصابيح تالفة فهل نستطيع القول أن نسبة المصابيح

التالفة فى الانتاج الكلى للمصنع **أقل من** 5% اختبر ذلك باستخدام مستوى معنوية 5%.

(11) يدعى احد الباحثين أن نسبة الطلاق بين المتزوجين حديثا **تزيد عن** 20% وللتحقق من صحة هذا الادعاء فقد تم اختيار عينة عشوائية من المتزوجين حديثا حجمها 100 فوجد ان حالات الطلاق فى العينة 22 حالة هل تؤكد بيانات العينة ادعاء هذا الباحث بمستوى معنوية 1%؟

(12) أوضحت احدى الدراسات الاحصائية السابقة أن نسبة الرجال المدخنين فى احدى المدن 30% وقد تم عمل حملة قوية لمكافحة التدخين فى هذه المدينة وبعد انتهاء هذه الحملة تم أخذ عينة عشوائية من هذه المدينة تشمل 2000 رجل فكان عدد المدخنين فى هذه العينة 400 بمستوى معنوية 5% هل تؤيد بيانات العينة نجاح هذه الحملة؟

(13) اذا علمت أن نسبة الطالبات فى المرحلة الابتدائية 55% فاذا سحبنا عينة عشوائية من 2000 طفلا من اطفال هذه المرحلة ووجدنا ان عدد الطالبات 950 هل نستطيع القول بأن نسبة الطالبات فى هذه المرحلة قد اختلفت اختبر ذلك بمستوى معنوية 5%.

(14) اذا علمت ان درجات الامتحان النهائى لطلبة الشهادة الاعدادية فى مادة الرياضيات تتوزع توزيعا طبيعيا بتباين قدره 169 ، فاذا تم اتباع طريقة جديدة فى تدريس هذه المادة ويعتقد انها ستقلل من تباين درجات الطلاب ولاختبار هذا الادعاء تم سحب عينة عشوائية من 20 طالب وبعد ان تم تدريسهم بالطريقة

الجديدة واجرى لهم الامتحان كان تباين درجاتهم 140 ، فهل تؤيد نتائج العينة الاعتقاد بان الطريقة الجديدة **تقلل** تباين درجات الامتحان النهائى لكل طلبة الشهادة الاعدادية فى هذه المادة وذلك باستخدام مستوى معنوية 5%.

(15) شركة لديها مصنعين الأول فى مدينة بور سعيد والثانى فى مدينة العاشر من رمضان اخذت عينة من 150 عامل من عمال الانتاج بمصنع بور سعيد فوجد أن متوسط الانتاج اليومى للعامل 300 وحدة بانحراف معيارى 25 وحدة ، كما اخذت عينة من 400 عامل من عمال الانتاج بمصنع العاشر من رمضان فوجد ان متوسط الانتاج اليومى للعامل 340 وحدة بانحراف معيارى 30 بدرجة ثقة 99% هل هناك اختلاف بين متوسط انتاجية العامل فى المصنعين؟

(16) للمقارنة بين معدلات الانجاب فى الريف والحضر تم اختيار عينة عشوائية من 200اسرة من سكان الريف فوجد ان متوسط عدد الأطفال فى الأسرة 10.4 طفل بانحراف معيارى 2.4 ، بينما اوضحت عينة من 150 اسرة من سكان الحضر فوجد ان متوسط عدد الاطفال فى الاسرة 9.6 بانحراف معيارى 1.6 فهل تؤيد هذه البيانات صحة الفرض القائل ان معدلات الانجاب فى الريف اكبر من معدلات الانجاب فى الحضر وذلك بمستوى معنوية 1%.

(17) للمقارنة بين متوسط درجات الطلبة والطالبات فى مادة الاحصاء للفرقة الثالثة فقد تم اخذ عينة من الطلبة وعينة من الطالبات وقد توافرت لديك البيانات التالية:

	حجم العينة	متوسط الدرجات	الانحراف المعيارى
الطلبة	70	17	6
الطالبات	80	14	7

هل هناك فرق جوهرى بين متوسط درجات الطلبة والطالبات بمستوى معنوية 1%.

(18) يوجد بأحد المصانع آلتين لتعبئة المواد الغذائية وباختيار عينة عشوائية من 15 عبوات من انتاج الآلة الأولى وجد أن متوسط وزن العبوة 204جرام وانحراف معيارى 20 جرام بينما اوضحت عينة عشوائية من 10 عبوات من انتاج الآلة الثانية أن متوسط وزن العبوة 210 جرام وانحراف معيارى 15 جرام بمستوى معنوية 1% اختبر تساوى متوسط وزن العبوة فى الآلتين.

(19) مجموعتان تتكون كل منهما من 300 مريض مصابين بمرض معين وقد تم اعطاء دواء معين للمجموعة الأولى ولم يعطى للمجموعة الثانية ، فتماثل 240 مريض للشفاء من المجموعة الأولى بينما تماثل 150 مريض للشفاء فى المجموعة الثانية ، هل ترى أن هذا الدواء يساعد على سرعة الشفاء بمستوى معنوية 1%.

المراجع

1- جلال الصياد ، عبد الحميد ربيع ، (1983) ، مبادىء الطرق الاحصائية ، الكتاب الجامعى ، جدة ، المملكة العربية السعودية.

2- سمير كامل عاشور ، سامية أبو الفتوح سالم ، (1992) ، مقدمة فى الاحصاء التحليلى ، معهد الدراسات والبحوث الاحصائية ، جامعة القاهرة.

3- محمود أبو النصر و آخرون ، (1996) ، الاحصاء وبحوث العمليات ، مكتبة عين شمس.

4- محمود أبو النصر وآخرون ، (2013) ، الاحصاء التطبيقى ، كلية التجارة ، جامعة عين شمس.

5- Bowen, E.,(1982),Basic Statistic For Business And Economics , McGraw Hill Book Co.,New York.

6- Elkablad,Fredrick A., The Statistical Methods In Business ,Application Of Probability And Inference To Business ,John Wiley& Sons Inc., New York.

7-Keeping, E.S., (1962), Introduction To Statistical Inference, Princton, N.JNostra. D.Van Nostrand Co.Ltd.

المطبعة
مطبعة جامعة عين شمس
Ain Shams University Press
Tel.: 24850162